動的解析の基礎

参考文献
(1)大崎順彦(1980):建築構造学大系24、振動理論、彰国社
(2)大崎順彦(1994):新・地震動のスペクトル解析入門、鹿島出版会

日中構造研究所　松原勝己

動的問題の特徴(1)

- 地震動を受けて構造物が揺れている時のように、外力や変位が時間とともに変動する。

- 動的問題→「運動方程式」を考慮
  （ニュートンの第二法則）

力＝質量×加速度　→　f＝m α

動的問題の特徴（2）

- 力の単位：N（ニュートン）
- 質量の単位：kg（キログラム）

　→重さを重力加速度（9.8m/sec^2）で割ったもの

ex. 10kNの重量の物体の質量は、・・・

$$10 \times 10^3 \div 9.8 = 1020\text{kg} = 1.02\text{t}$$

- 加速度の単位：m/sec^2

　→1sec間に速度（m/sec）がどれだけ変化

　するかを表す量

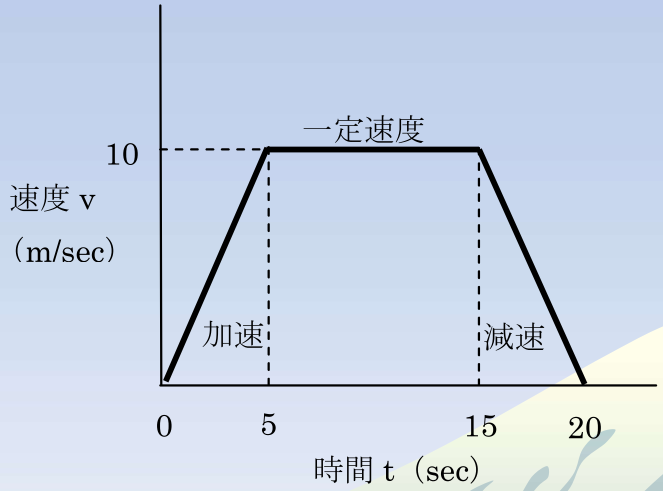
加速度（1）

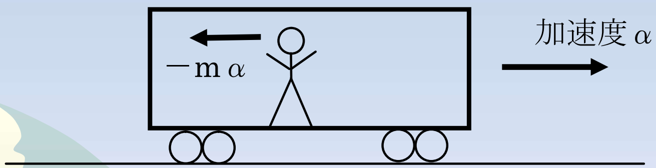
- 加速度：1sec間に速度がどれだけ変化するか？

速度（m/sec）とは？→1sec間に変位（m）する大きさ

ex. 電車が発車し、加速して一定速度に達した後、減速して停止するまでの様子で考えてみる。

加速度（2）





0～5sec ； 5sec間に0の速度から10m/secまで増加

→ 1sec間に2m/secの速度増加 → 加速度は、$2m/sec^2$

5～15sec ； 速度が一定 →速度変化が無い → 加速度は、$0m/sec^2$

15～20sec ； 5sec間に10m/secの速度から0まで減少

→ 1sec間に2m/secの速度減少 → 加速度は、－2m/sec2

◎加速度は、時間に対する速度の勾配である・・・

速度 $v = dx/dt$（変位xの時間tによる1階微分）

加速度$\alpha = dv/dt = d^2x/dt^2$（変位xの時間tによる2階微分）

運動方程式(1)

$f = m\alpha$

f : 着目する構造物に作用する全ての力(ベクトル和)

ex.復元力、反力、減衰力、抵抗力など

m : 構造物の質量

α: 加速度

特別な場合として、構造物が静止しているとき、$\alpha=0$

$\rightarrow f = 0$ (構造物に作用する力が釣り合っている!)

◎運動方程式の変形 : $f - m\alpha = 0$

復元力や反力など通常の力に加えて$-m\alpha$という仮想的な力を考えると、静的な釣り合い式となる。(ダランベールの原理)

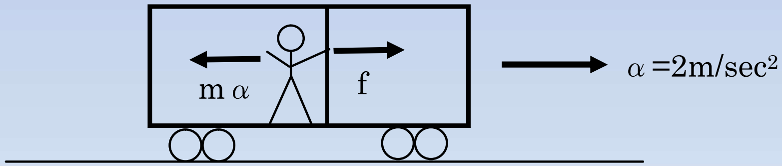
この仮想的な力$-m\alpha$を慣性力と呼ぶ。

運動方程式(2)

先ほどの電車の例で、電車内に立っている人に作用する力の釣り合いを考える。

質量m=60kgの人が電車内の縦の棒を掴んでいる状態を仮定。

このとき、人に作用する力は、慣性力mαと棒から受ける反力fである。



0〜5sec (加速時); 慣性力は後向きに作用する

$f - m\alpha = 0 \rightarrow f - 60\text{kg} \times 2\text{m/sec}^2 = 0 \rightarrow f = 120\text{N}$(棒から腕に引張の反力)

5〜15sec(一定スピード); $\alpha=0$なので、慣性力はゼロ

$f = 0$ (棒から受ける反力ゼロ)

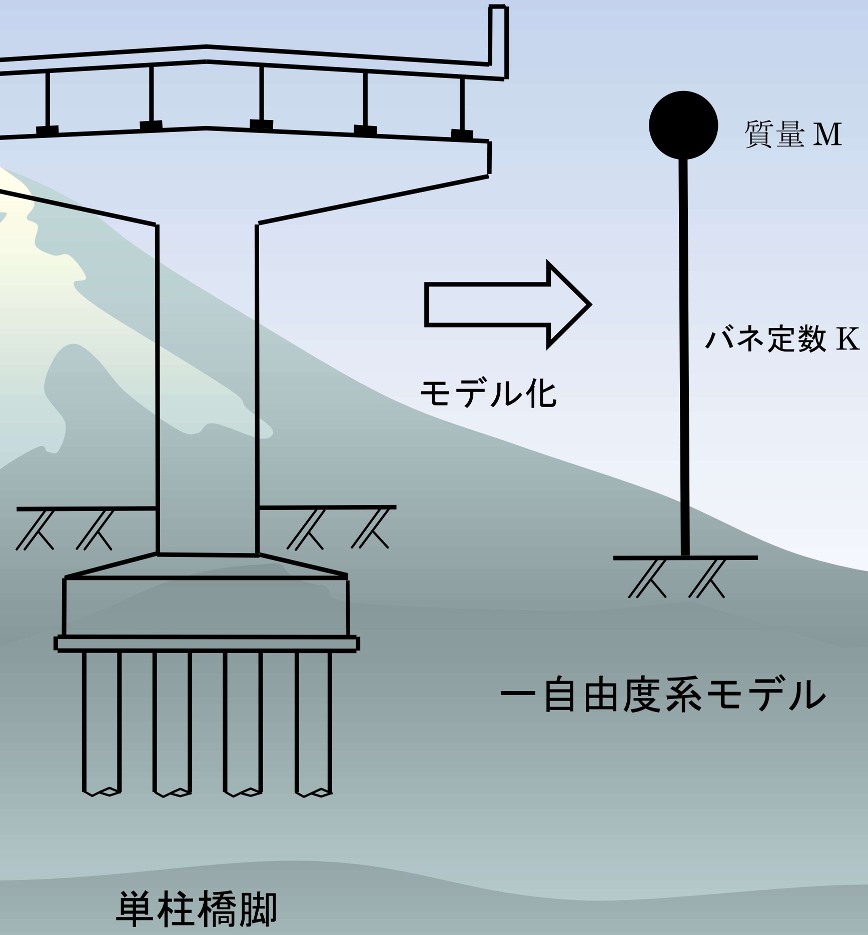
15〜20sec(減速時); 慣性力は前向きに作用する

$f - m\alpha = 0 \rightarrow f - 60\text{kg} \times (-2\text{m/sec}^2) = 0 \rightarrow f = -120\text{N}$(棒から腕に圧縮反力)

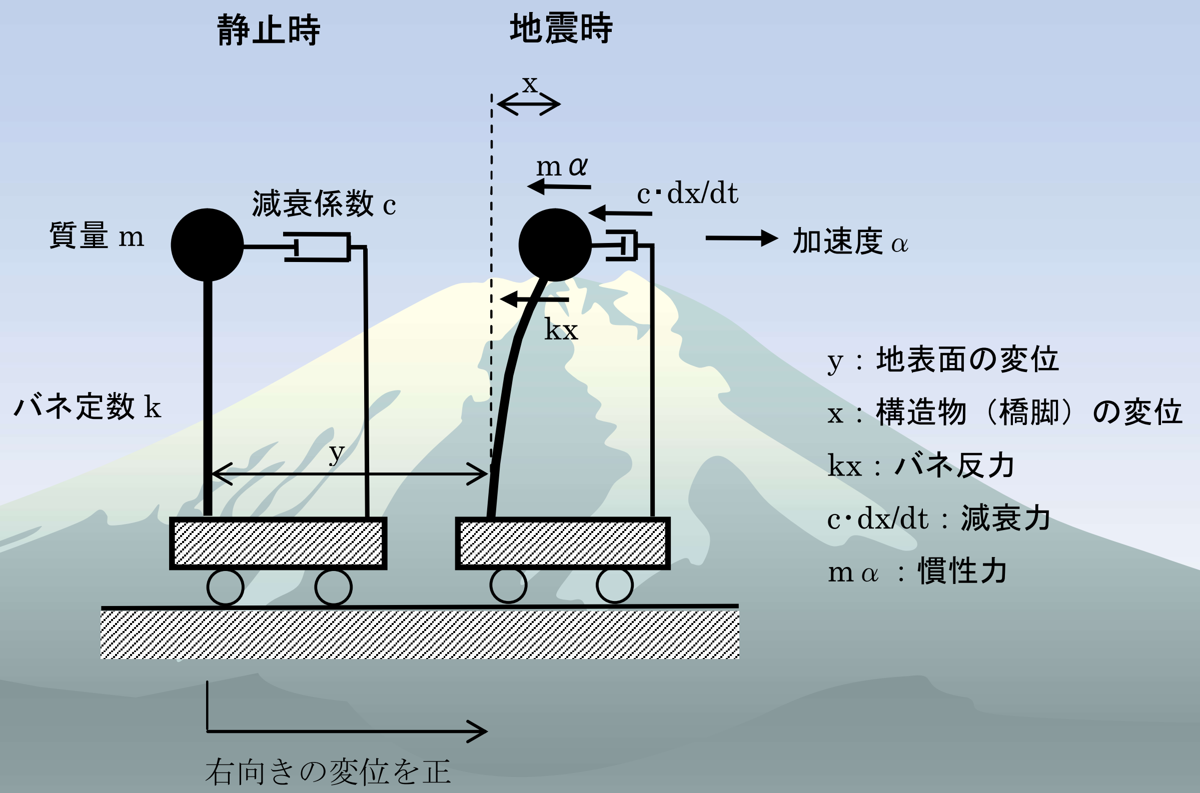
一自由度系の振動(1)

一自由度系振動モデルとは･･･

- 最も単純な振動モデル
- 集中質量(質点)として扱う
- 構造物全体を、1個の質点と1個のバネでモデル化する。
- 保有水平耐力法の地震外力を設定するときのモデル化である。
- 応答スペクトルの概念に繋がる。



一自由度系の振動(2)



質点mの変位: $y+x$

質点mの加速度: $\alpha = \dfrac{d^2}{dt^2}(y+x)$

質点mの慣性力: $m\alpha = m\dfrac{d^2}{dt^2}(y+x)$

質点に働くバネ反力: kx

質点に働く減衰力: $c\dfrac{dx}{dt}$

一自由度系の振動(3)

- 運動方程式(動的な釣り合い式)

質点mに作用する力(慣性力、バネ反力、減衰力)の釣り合い式を考えればよい。

$$-m\frac{d^2}{dt^2}(x+y)-kx-c\frac{dx}{dt}=0$$

力の向きに注意。どの力も左向きなので、マイナスの符号になる。

振動方程式: $$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=-m\frac{d^2y}{dt^2}$$

一自由度系の振動(4)

- 振動方程式の変形

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=-m\frac{d^2y}{dt^2}$$

時間に関する微分を上付きのドットで表す。例えば、$\dot{x}$, $\ddot{x}$ など。

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=-m\ddot{y}$$

両辺をmで割り、ω_nおよびhというパラメータを導入する。

$$\frac{c}{m}=2h\omega_n\ ,\quad \frac{k}{m}=\omega_n{}^2$$

$$\ddot{x}+2h\omega_n\dot{x}+\omega_n{}^2x=-\ddot{y}$$

ここに、ω_nを**固有円振動数**(単位:rad/sec)、hを**減衰定数**(無次元量)と呼ぶ。

これら2つのパラメータと**入力地震動** $\ddot{y}$ が既知のとき、**変位応答量**xが定まる。

一自由度系の振動(5)

◆ 固有振動数と減衰定数

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

T_nを、固有周期(単位:sec)、f_nを、固有振動数(単位:Hz)と呼ぶ。

◎地震外力などが作用しない状態で、構造物を自由振動させたときに、構造物が振動する周期(振動数)が、固有周期(固有振動数)である。

地震外力が作用しないときの振動方程式:

$$\ddot{x} + 2h\omega_n \dot{x} + \omega_n{}^2 x = 0$$

・$h<1$のとき、変位xが振動的な性状になるが、$h>1$のとき、バネの復元力に比べて減衰力が大きくなり、振動的性状を示さない。

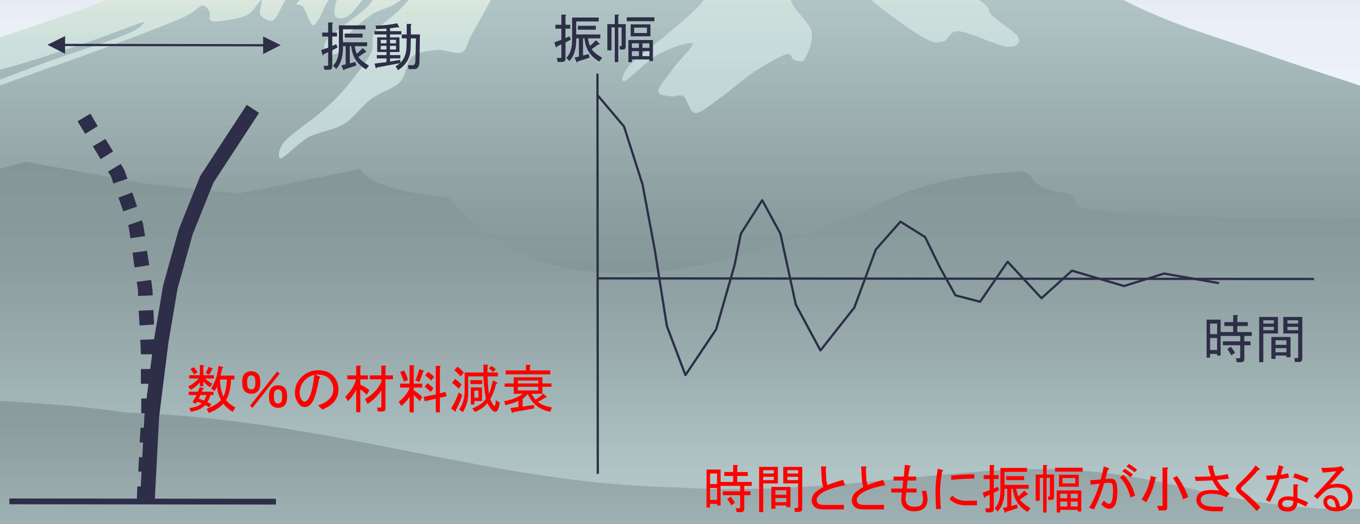
・hが大きいほど、時間とともに変位が小さくなるスピードが速くなる。

・hは小数あるいは%で示すことが多い。ひずみが小さいとき、鉄で2～3%、コンクリートや土で5%程度の値をとる。

減衰について(その1)

- **材料減衰**

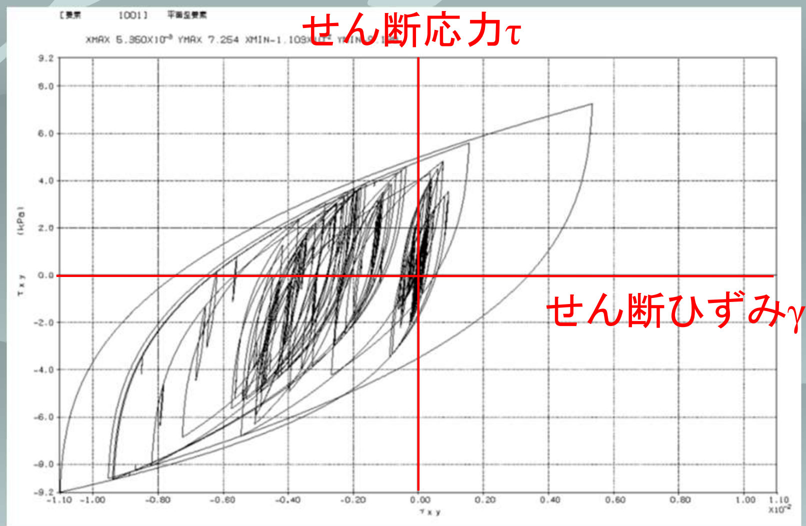
 土、コンクリートあるいは鋼など、材料自体が持っている減衰。材料内部における摩擦などにより発生すると考えられ、ひずみが小さな領域でも存在する。土やコンクリートで5%、鋼で2～3%程度の値をとる。



減衰について（その2）

- 履歴減衰

土やコンクリートなどの材料が、地震動など大きな外力を受けたとき、発生するひずみが大きな領域において、応力･ひずみ関係が非線形履歴挙動を示すことでエネルギーが消費されることによって生じる減衰。土の場合、発生するひずみの大きさに依存するが、20～30%の減衰となることもある。なお、応力･ひずみ関係に非線形履歴を考慮した場合には、自動的に考慮される。



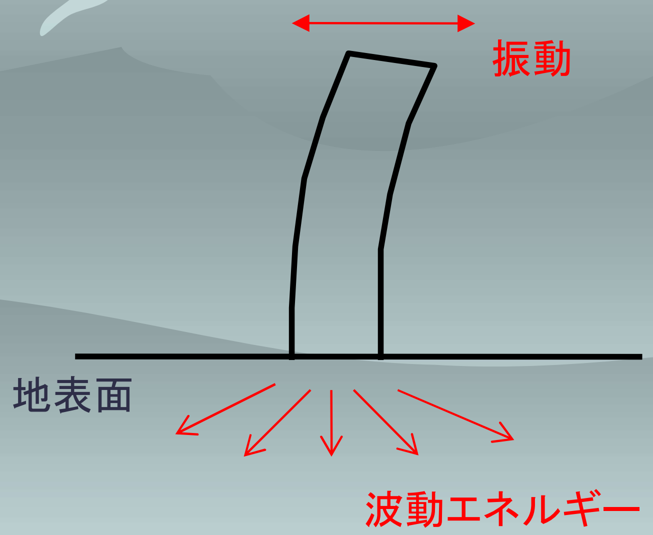
土の履歴特性（ROモデル）

減衰について（その3）

- 逸散減衰

地盤上に設置される構造物が、地震動などの揺れを受けるとき、構造物の振動が基礎から地中に向かって、伝達し逃げていくことによって構造物の震動が減衰してゆく。この減衰が逸散減衰と呼ばれる。

地盤が弾性体であっても発生する減衰であり、地盤の剛性（せん断波速度）が小さくなるほど、大きくなる傾向がある。地盤と構造物をFEMなどを用いて一体で解析した場合には、自動的に考慮される。一方、地盤を集約SRばねでモデル化した場合には、SRばねに10～20%の減衰が付与される。



自由振動(1)

地震外力が作用しないときの振動方程式(自由振動時):

$$\ddot{x} + 2h\omega_n \dot{x} + \omega_n{}^2 x = 0$$

この解(変位x)は、以下の式で表すことができる。

$$x = e^{-h\omega_n t}\left(x_0 \cos\sqrt{1-h^2}\,\omega_n t + \frac{hx_0 + \dot{x}_0/\omega_n}{\sqrt{1-h^2}} \sin\sqrt{1-h^2}\,\omega_n t \right)$$

ここに、

x_0 :初期変位

$\dot{x}_0$:初期速度

上式は、固有円振動数ω_n、減衰定数h、初期変位および初期速度がわかれば、変位応答(時刻歴)が求められることを示している。

以下では、上式を使って、エクセルで計算した例を示す。

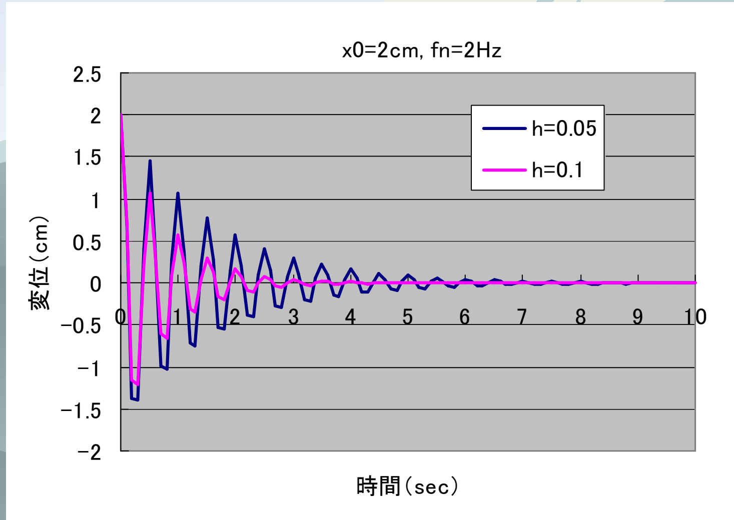
自由振動(2)

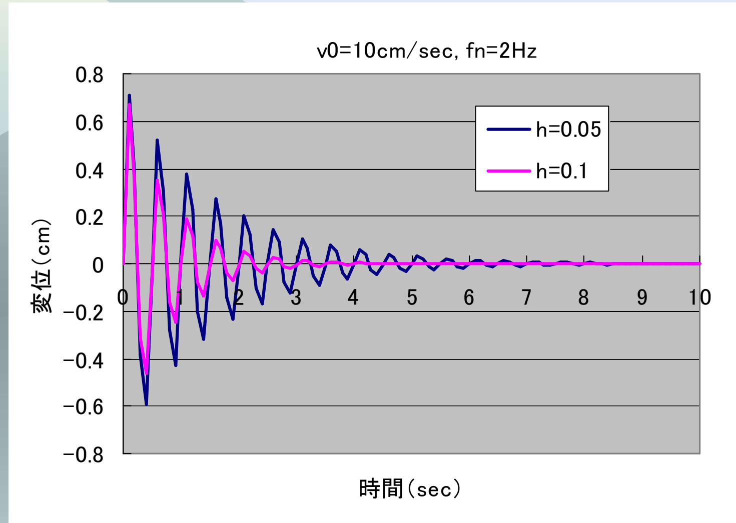
◆ 計算条件

・初期変位2cmを与えた場合と初期速度10cm/secを与えた場合

・固有振動数 f_n=2Hz （ω_n=12.57rad/sec）

・減衰定数 h=0.05と h=0.1の2通り





・初期変位を与えた場合と初期速度を与えた場合で、t=0付近の波形が異なる。

・1sec間に2回振動すること、減衰が大きいほど揺れが小さくなるスピードが速い。

強制振動（１）

地震時のように、構造物に強制的な外力や変位が作用したときに生じる振動を、

強制振動という。

地震時のような不規則外力ではなく、規則的な外力（正弦波）が作用するときの振動を考える。

入力加速度 $\ddot{y} = a \sin \omega t$ とすると、振動方程式は、次式となる。

$$\ddot{x} + 2h\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = -a \sin \omega t$$

ここに、

a ：入力加速度の大きさ（振幅）

ω ：外力の円振動数

ω_n ：固有円振動数（構造物の剛性と質量に関係）

h ：減衰定数

振動が静止状態（初変位と初速度がゼロ）から始まると仮定し、上式の解（変位x）を、以下に示す。

強制振動(2)

正弦波の加速度が作用する強制振動時の変位:

$$x = e^{-h\omega_n t}(A\cos\sqrt{1-h^2}\,\omega_n t + B\sin\sqrt{1-h^2}\,\omega_n t) - \frac{ma}{k}\cdot\frac{1}{\sqrt{\left(1-(\omega/\omega_n)^2\right)^2 + \left(2h(\omega/\omega_n)\right)^2}}\sin(\omega t - \phi)$$

ここに、

$$A = -\frac{ma}{k}\cdot\frac{2h(\omega/\omega_n)}{\left(1-(\omega/\omega_n)^2\right)^2 + \left(2h(\omega/\omega_n)\right)^2}$$

$$B = \frac{ma}{k}\cdot\frac{\omega/\omega_n}{\sqrt{1-h^2}}\cdot\frac{1-(\omega/\omega_n)^2 - 2h^2}{\left(1-(\omega/\omega_n)^2\right)^2 + \left(2h(\omega/\omega_n)\right)^2}$$

$$\phi = \arctan\frac{2h(\omega/\omega_n)}{\left|1-(\omega/\omega_n)^2\right|}$$

・第1項は、固有振動数で振動する変位(自由振動)を、第2項は、外力の振動数で振動する変位(強制振動)を表す。第1項は、時間とともに減衰する。

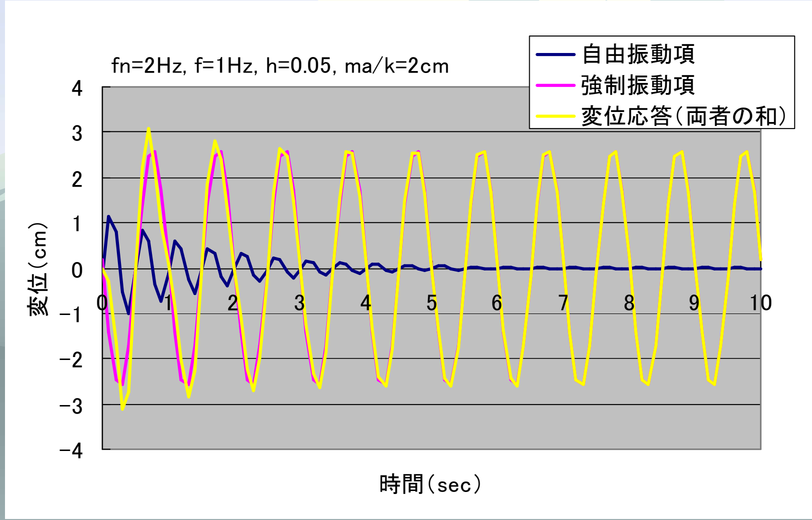
・強制振動に対する変位応答は、慣性力maが静的に作用したときの変位ma/k、固有振動数に対する外力の振動数の比ω/ωn(振動数比)および減衰定数によって定まる。

強制振動(3)

◆ 計算例

固有振動数fn:2Hz、減衰定数:0.05(5%)

外力の振動数:1Hz、慣性力maに対する静的変位ma/k:2cm



・固有振動数で振動する自由振動は、数secで減衰する。変位応答は、自由振動が減衰すると、強制振動とほぼ等しくなる(定常振動状態)。

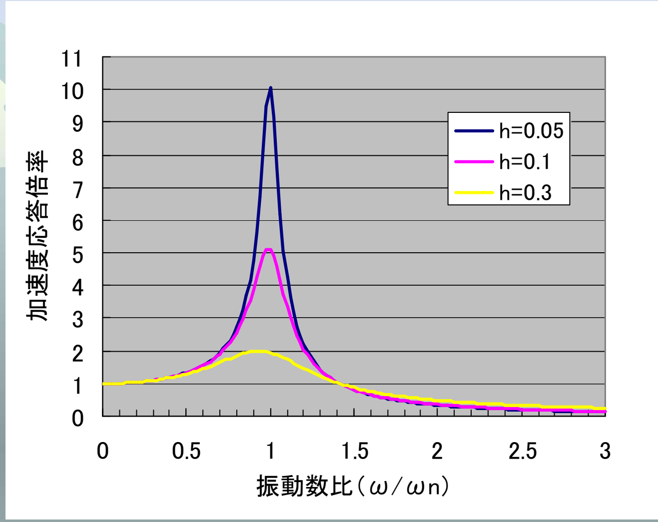
・正弦波加振では、振動の大半を、定常状態の強制振動が占める。

強制振動（4）

◆ 加速度応答倍率

強制振動項に着目し、入力加速度の最大値aに対する応答加速度（絶対加速度）の最大値の比をとれば、次式を得る。

$$\frac{(\ddot{x}+\ddot{y})_{\max}}{a}=\sqrt{\frac{1+(2h\omega/\omega_n)^2}{\left(1-(\omega/\omega_n)^2\right)^2+\left(2h\omega/\omega_n\right)^2}}$$



・減衰の大きさによらず、振動数比が1（外力の振動数と固有振動数が一致）のとき、応答が最も大きくなることがわかる（共振状態）。

・減衰が大きいほど、応答が小さくなる傾向がある。

地震時の振動(1)

一自由度系の振動方程式:

$$\ddot{x} + 2h\omega_n \dot{x} + \omega_n{}^2 x = -\ddot{y}$$

・地震時の入力加速度 $\ddot{y}$ は、不規則な波形になる。→ 数値計算の必要

・ニガム法 → 応答スペクトルの計算でよく用いられる方法

・ニガム法では、デジタル値で与えられる入力加速度波形のデータ間は、直線的に変化するものと仮定し、1自由度系の振動方程式の理論解を用いるのが特徴。

$$\begin{Bmatrix} x(\Delta t) \\ \dot{x}(\Delta t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_0 \\ \ddot{y}_1 \end{Bmatrix}$$

$x(\Delta t)$, $\dot{x}(\Delta t)$:次ステップの変位と速度

x_0 , $\dot{x}_0$:現ステップの変位と速度

$\ddot{y}_0$, $\ddot{y}_1$:現ステップと次ステップの入力加速度値

地震時の振動(2)

$$A_{11} = e^{-h\omega_n \Delta t}\left(\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}\sin\omega_d \Delta t + \cos\omega_d \Delta t\right) \qquad \omega_d = \sqrt{1-h^2}\,\omega_n$$

$$A_{12} = e^{-h\omega_n \Delta t}\frac{\sin\omega_d \Delta t}{\omega_d}$$

$$A_{21} = -e^{-h\omega_n \Delta t}\frac{\omega_n}{\sqrt{1-h^2}}\sin\omega_d \Delta t$$

$$A_{22} = e^{-h\omega_n \Delta t}\left(-\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}\sin\omega_d \Delta t + \cos\omega_d \Delta t\right)$$

$$B_{11} = \frac{1}{\omega_n{}^3 \Delta t}\left[e^{-h\omega_n \Delta t}\left\{\frac{2h^2-1+h\omega_n \Delta t}{\sqrt{1-h^2}}\sin\omega_d \Delta t + (2h+\omega_n \Delta t)\cos\omega_d \Delta t\right\} - 2h\right]$$

$$B_{12} = \frac{1}{\omega_n{}^3 \Delta t}\left[-e^{-h\omega_n \Delta t}\left\{\frac{2h^2-1}{\sqrt{1-h^2}}\sin\omega_d \Delta t + 2h\cos\omega_d \Delta t\right\} + 2h - \omega_n \Delta t\right]$$

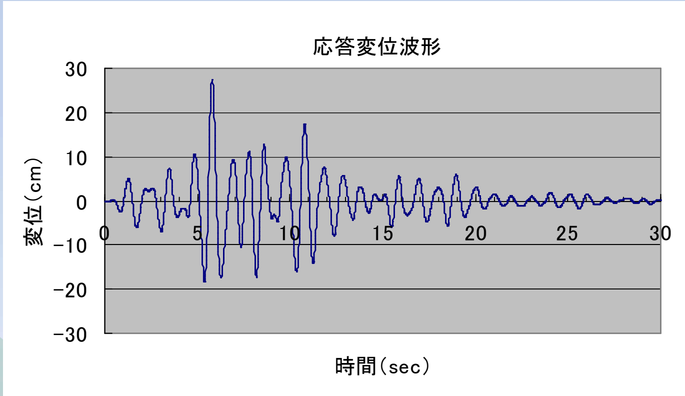
$$B_{21} = \frac{1}{\omega_n{}^2 \Delta t}\left[-e^{-h\omega_n \Delta t}\left(\frac{h+\omega_n \Delta t}{\sqrt{1-h^2}}\sin\omega_d \Delta t + \cos\omega_d \Delta t\right) + 1\right]$$

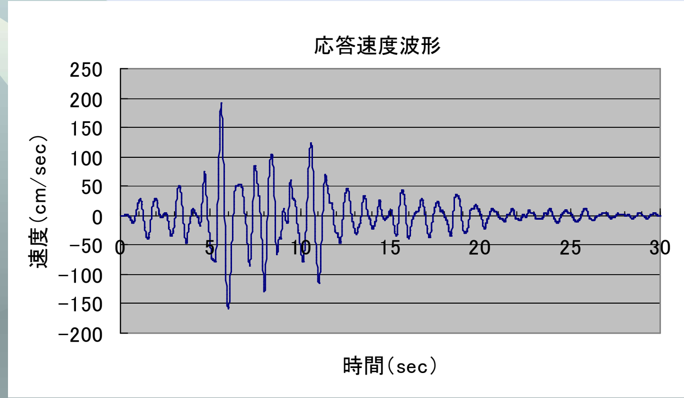
$$B_{22} = \frac{1}{\omega_n{}^2 \Delta t}\left[e^{-h\omega_n \Delta t}\left(\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}\sin\omega_d \Delta t + \cos\omega_d \Delta t\right) - 1\right]$$

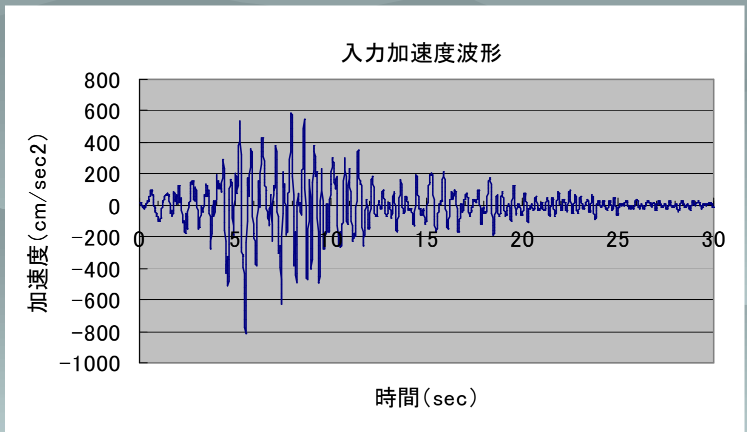
地震時の振動(3)

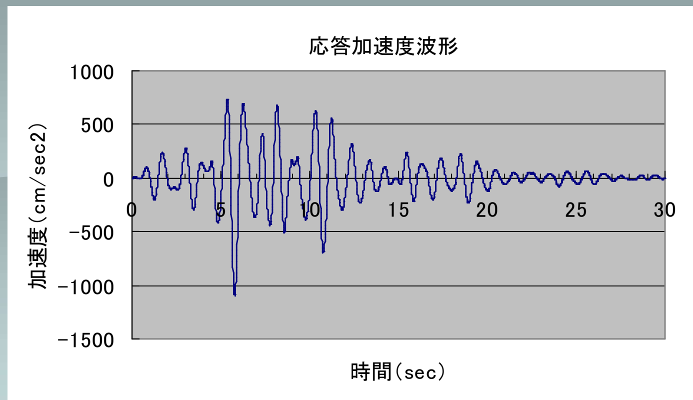
◆計算例

- 固有振動数fn=1Hz, 減衰定数h=0.05
- 入力加速度:レベル2・タイプII・1種地盤
- エクセルマクロ(VBA)で計算









地震応答スペクトル(1)

◆ 応答スペクトルの概念

・一自由度系の最大応答

・変位、速度および加速度がある。

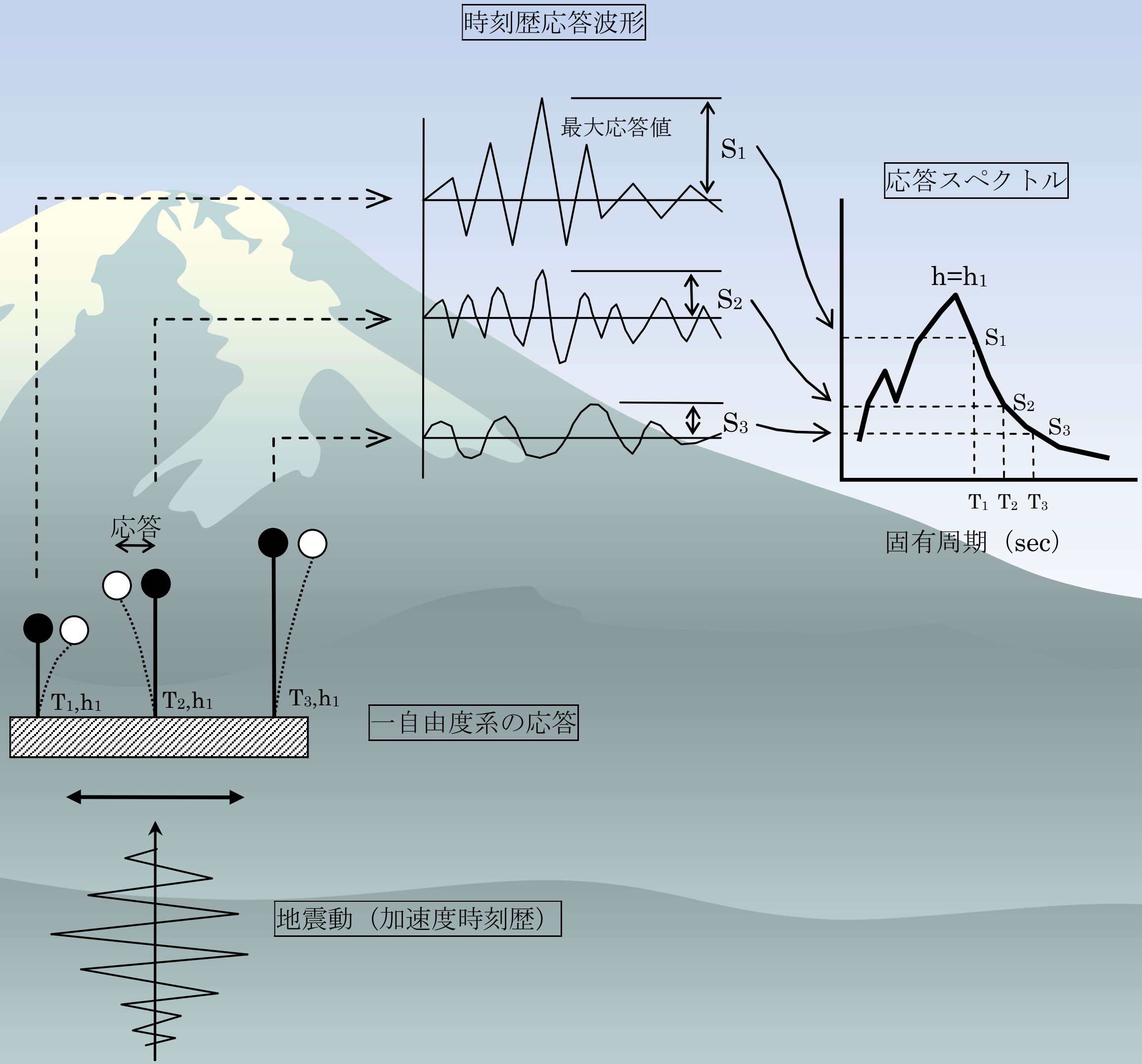
・横軸に固有周期をとる。

・減衰によって異なる。

・地震動によって異なる。

・構造物の固有周期がわかると、応答や地震力(震度)がわかる。

→保有水平耐力法で使用

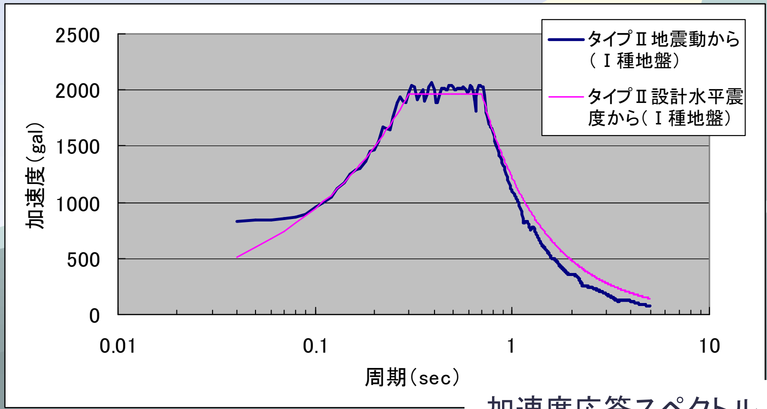


地震応答スペクトル(2)

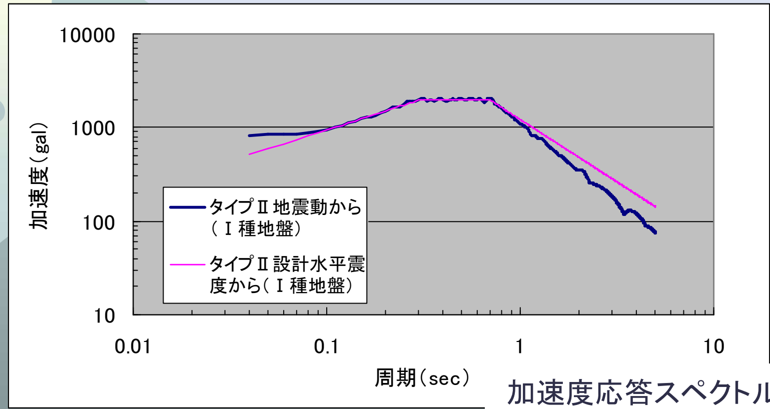
◆ 計算例

・道示のレベル2・タイプIIの1種地盤に対する地震動(1波目)の応答スペクトルを計算

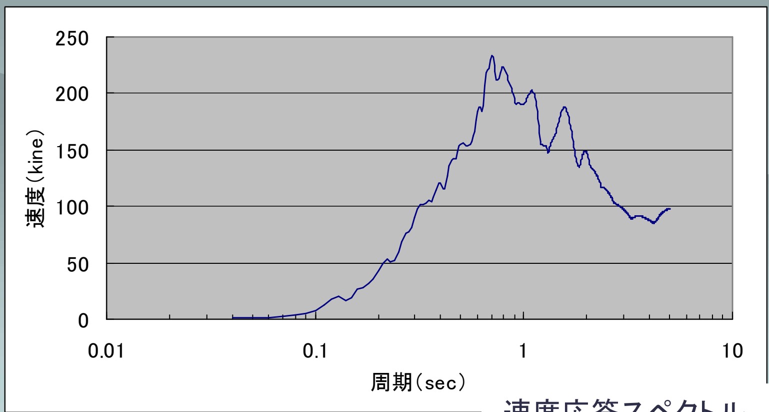
・ニガム法を用い、エクセルVBAで計算



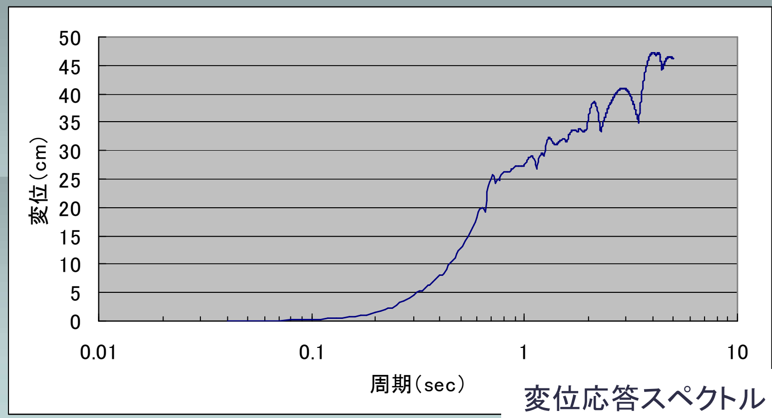
加速度応答スペクトル



加速度応答スペクトル(対数表示)



速度応答スペクトル



変位応答スペクトル