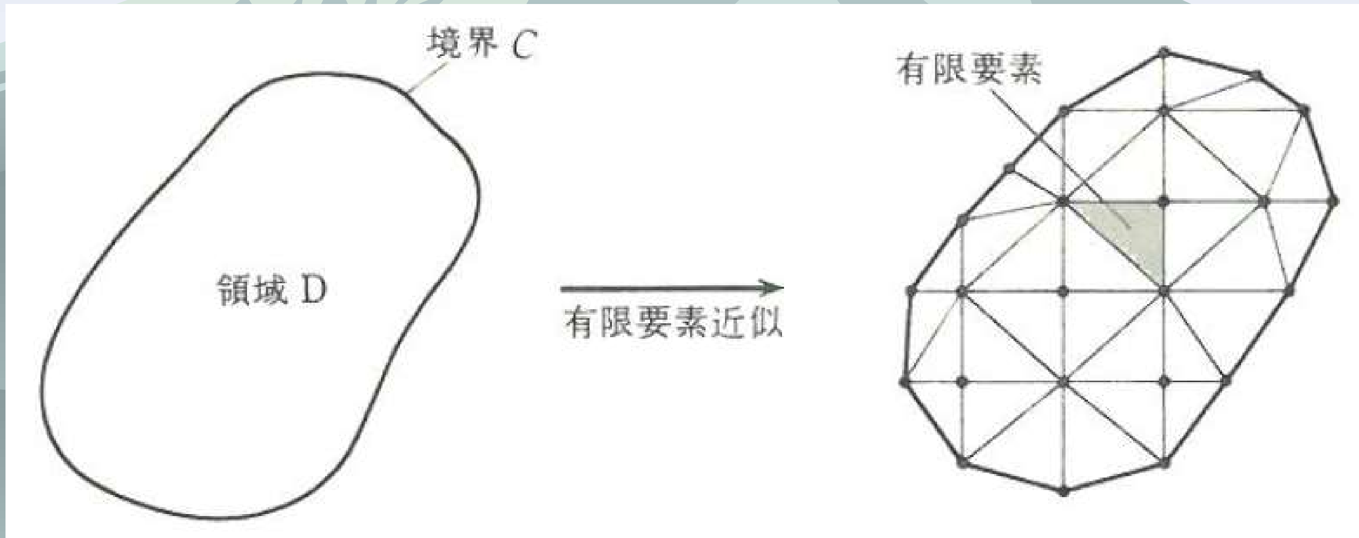
FEMの初歩解説

参考文献
(1)三好俊郎(1994):有限要素法入門、培風館
(2)栗崎彰(2012):設計技術者のための有限要素法はじめの一歩、講談社
(3)中島研伍(2011):有限要素法入門、弾性力学入門、中島研伍教授HP

日中構造研究所　松原勝己

有限要素法(FEM)とは？(1)

- 解法の特徴:
  対象とする構造物(or地盤)を、有限個の要素の集合体に置き替えて解析を行う。
  (それぞれの要素は数個の節点を持つ)



対象構造物の有限要素によるモデル化

有限要素法（FEM）とは？（2）

- 近似解法のひとつ

→対象構造物に対して成立する偏微分方程式を、節点変位に関する**連立一次方程式**に帰着させる。（変位法）

連立方程式：

$$\{f\} = [K]\{\delta\}$$

剛性マトリクス

節点外力　節点変位

・有限要素法で最も大事な概念
・例えば、地盤モデルで1000節点のモデルの場合、2000×2000のマトリクスとなる。

有限要素法(FEM)とは？(3)

- 解析処理の手順

プリ処理：要素分割データ(解析メッシュ)の作成
物性値、境界条件および荷重の設定

ソルバー：入力データに従い、剛性マトリクスを作成し、荷重条件に従う連立方程式を解く

ポスト処理：変位、反力、応力およびひずみの出力
変位図、応力コンター図などの出力

プリ処理
- 寸法・形状(メッシュ)
- 物性値
- 境界条件
- 荷重条件

→

ソルバー
- 有限要素法の心臓部
- 多次元の連立一次方程式を解く

→

ポスト処理
- 解析値の出力
- ファイルへの保存
- 解析値の図化

剛性マトリクス（バネモデル）（1）

- マトリクスの積について

$$[C]=[A][B]$$

注意点1：積の交換法則が成立しない。（[A]と[B]の順序を変えると答が変わる）
注意点2：[A]の列数と[B]の行数が等しい場合に積が定義できる。

2行×2列のマトリクスの積

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} aA+bC & aB+bD \\ cA+dC & cB+dD \end{bmatrix}$$

2行×2列のマトリクスと2行のベクトルの積

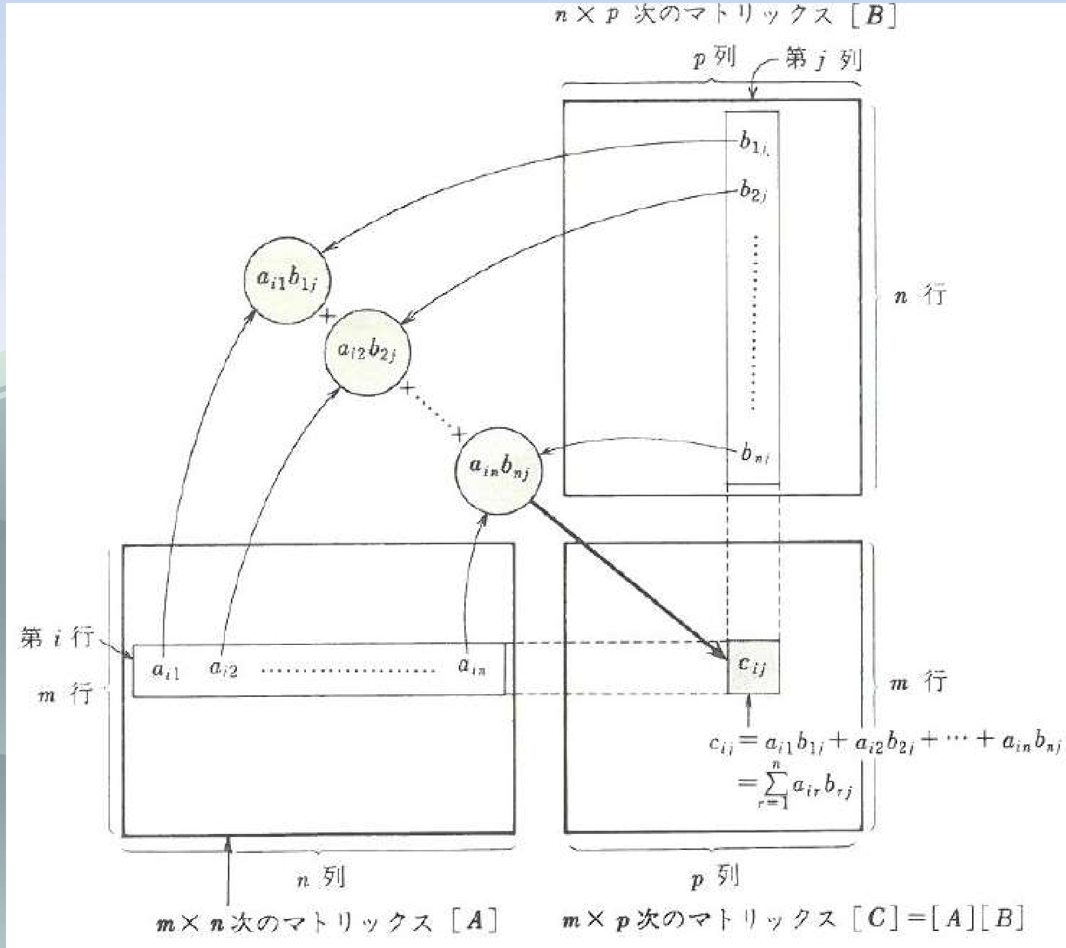
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\times\begin{Bmatrix} E \\ F \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} aE+bF \\ cE+dF \end{Bmatrix}$$

2行×2列のマトリクスと3行のベクトルの積

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\times\begin{Bmatrix} H \\ I \\ J \end{Bmatrix}=\text{「計算できない」}$$

剛性マトリクス（バネモデル）（2）

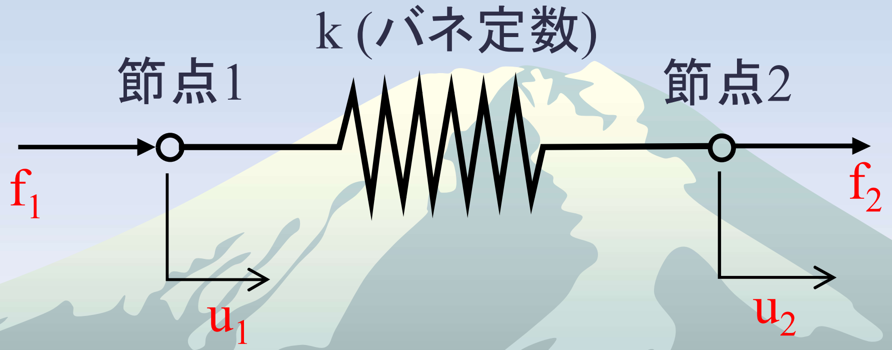
- マトリクスの積について（続き）



マトリクスとマトリクスの積の考え方

剛性マトリクス(バネモデル)(3)

- 1本のバネの剛性マトリクス



f_1,f_2:節点外力
u_1,u_2:節点変位

(1)節点1および2にそれぞれu_1およびu_2の変位を与える。
(2)そのとき、バネには$k(u_2-u_1)$の**引張力**が発生する。
(3)節点1と節点2におけるバネ反力と節点外力の釣り合いから、次式が成立する。

$$f_1=-k(u_2-u_1)\ ,\ f_2=k(u_2-u_1) \quad \rightarrow \quad f_1=k\cdot u_1-k\cdot u_2\ ,\ f_2=-k\cdot u_1+k\cdot u_2$$

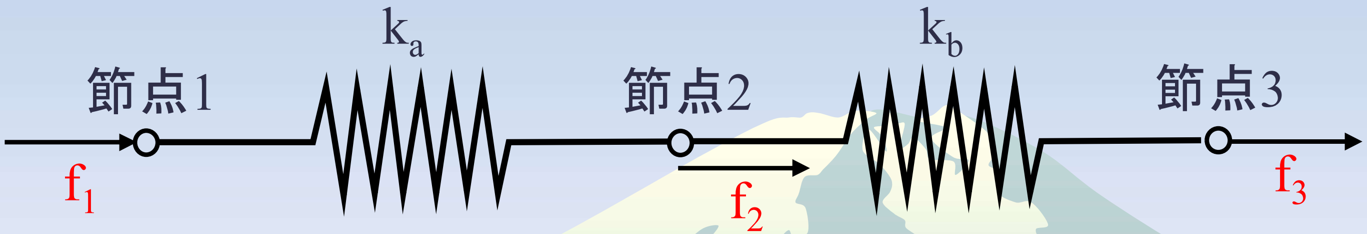
(4)**マトリクス表示**をすると、次式を得る。

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \longrightarrow \boxed{\{f\}=[K]\{\delta\}} \quad \{f\}=\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad \{\delta\}=\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad [K]=\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

剛性方程式　荷重ベクトル　変位ベクトル　剛性マトリクス

剛性マトリクス（バネモデル）（4）

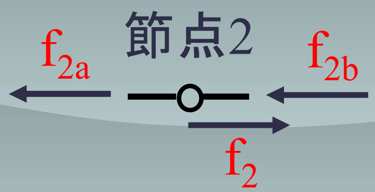
- ２本のバネの剛性マトリクス



f_1,f_2,f_3：節点外力
u_1,u_2,u_3：節点変位

2個の別々のバネに分解

節点2の近傍



力の釣り合いを考慮すると、
$f_2=f_{2a}+f_{2b}$ → 後で使う

（f2aとf2bの力の方向に注意）

剛性マトリクス（バネモデル）（5）

◆ ２本のバネの剛性マトリクス（続き）

kaバネ：
$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_{2a} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

kbバネ：
$$\begin{Bmatrix} f_{2b} \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_b & -k_b \\ -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_{2a} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ f_{2b} \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

足し合わせ　$f_2=f_{2a}+f_{2b}$を考慮

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a+k_b & -k_b \\ 0 & -k_b & k_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

荷重ベクトル　剛性マトリクス　変位ベクトル

バネkaの剛性マトリクス

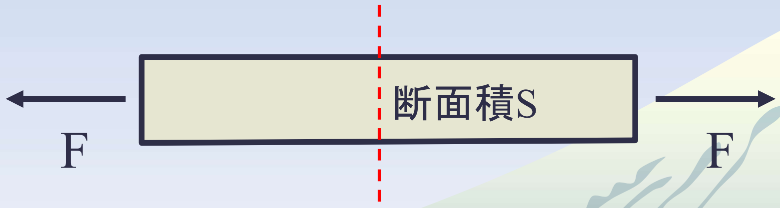
バネkbの剛性マトリクス

1本のバネの剛性マトリクスを重ね合わせることで2本のバネの剛性マトリクスを作成できる。
→これが、有限要素法において**要素剛性マトリクス**から**全体剛性マトリクス**を作成する際の一般的な手順となる。

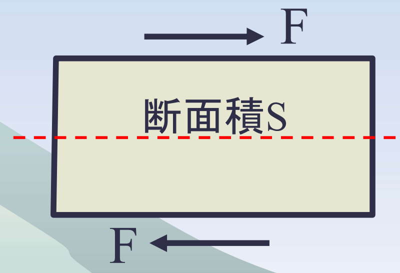
弾性体の力学(1)

◆ 応力の概念

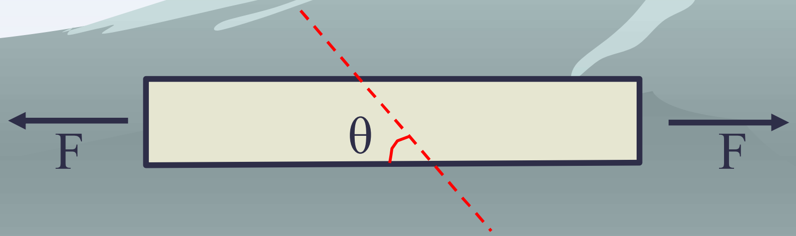
・物体内部に発生する内力であり、仮想面上での単位面積当たりの力(単位:kN/m2)
注意点:物体内部の位置と考慮する面の方向によって値が異なる

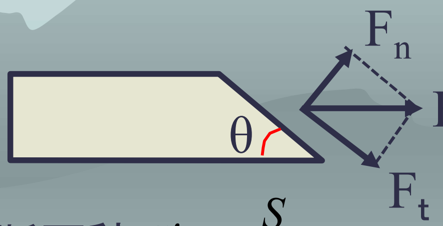


直応力 $\sigma = \dfrac{F}{S}$



せん断応力 $\tau = \dfrac{F}{S}$





Fn:直応力成分
Ft:せん断応力成分

断面積 $S' = \dfrac{S}{\sin\theta}$

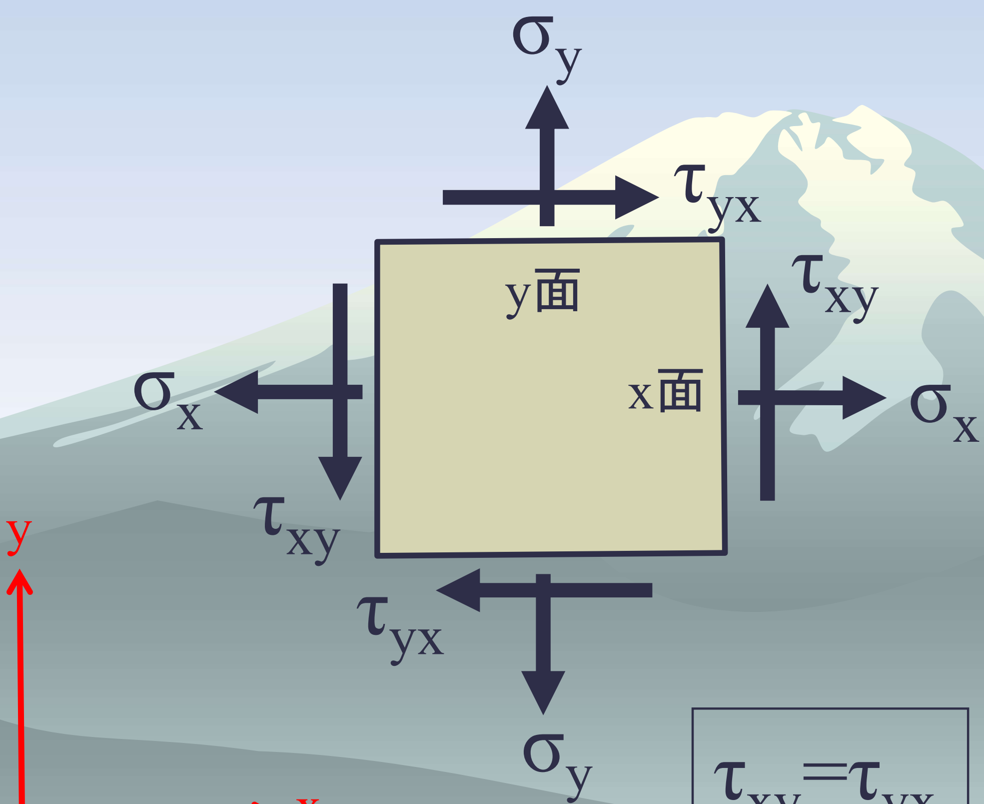
直応力 $\sigma = \dfrac{F_n}{S'} = \dfrac{F\sin\theta}{S/\sin\theta} = \dfrac{F}{S}\sin^2\theta$

せん断応力 $\tau = \dfrac{F_t}{S'} = \dfrac{F\cos\theta}{S/\sin\theta} = \dfrac{F}{S}\sin\theta\cos\theta$

一様な断面積の棒材の一軸引張についても、応力を定義する面の方向により、せん断応力が発生したり、応力値が異なってくる。

弾性体の力学(2)

◆ 2次元問題での応力



2次元問題では、x軸およびy軸に直交する面で定義される3つの応力($\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$)を用いる。

σ_x : x方向の直応力
σ_y : y方向の直応力
τ_{xy} : せん断応力

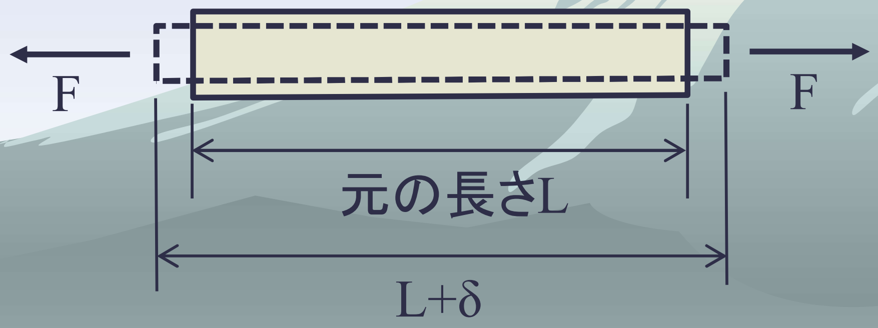
$$\tau_{xy}=\tau_{yx}$$

図では直応力を引張を正で定義(有限要素法における通例の定義)

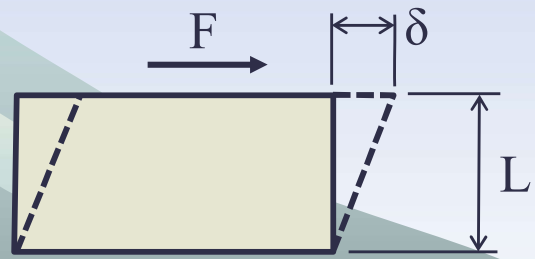
弾性体の力学(3)

◆ ひずみの概念

・物体内部の変形の程度を表し、単位長さ当たりの伸び(縮み)あるいはズレで表す。したがって、無次元量となる。応力と同様に、直ひずみとせん断ひずみがある。



δ:伸び量



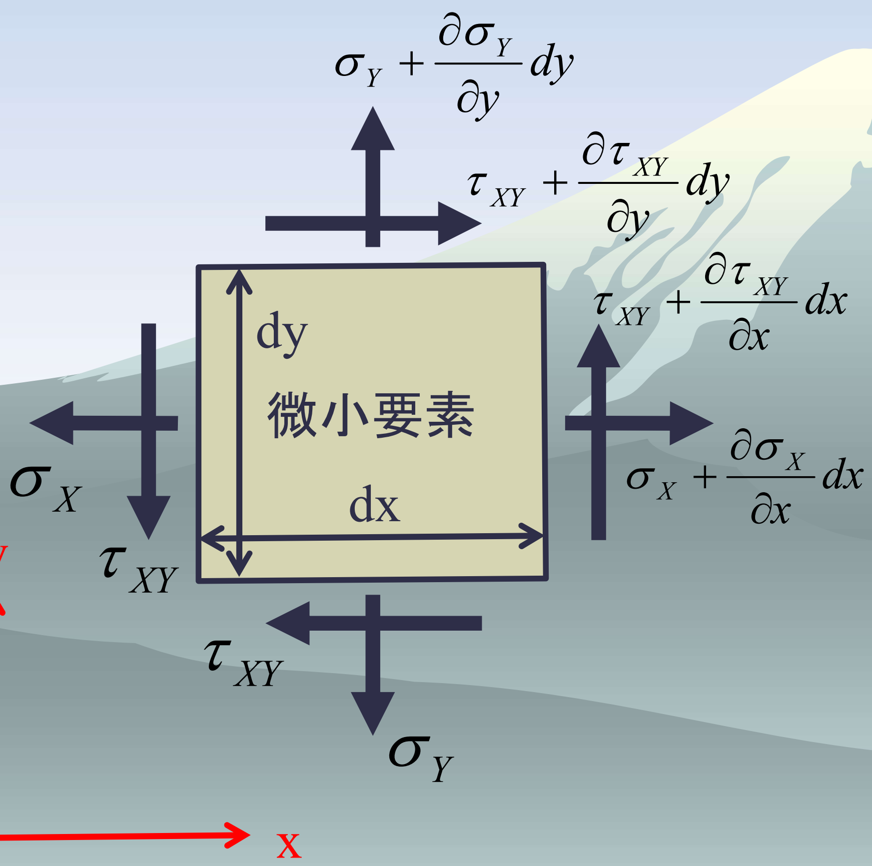
δ:せん断変形量

直ひずみ: $\varepsilon = \dfrac{\delta}{L}$　　せん断ひずみ: $\gamma = \dfrac{\delta}{L}$

2次元問題でのひずみは、x方向直ひずみε_x、y方向直ひずみε_yおよびせん断ひずみγ_{xy}の3つが用いられる。

弾性体の力学(4)

- 釣り合い方程式(2次元)



X方向の力の釣り合い;

$$-\sigma_X dy - \tau_{XY} dx + \left(\sigma_X + \frac{\partial \sigma_X}{\partial x} dx\right) dy + \left(\tau_{XY} + \frac{\partial \tau_{XY}}{\partial y} dy\right) dx = 0$$

Y方向の力の釣り合い;

$$-\sigma_Y dx - \tau_{XY} dy + \left(\sigma_Y + \frac{\partial \sigma_Y}{\partial y} dy\right) dx + \left(\tau_{XY} + \frac{\partial \tau_{XY}}{\partial x} dx\right) dy = 0$$

上記の2式より、以下の釣り合い方程式が得られる。

$$\frac{\partial \sigma_X}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{XY}}{\partial y} = 0$$

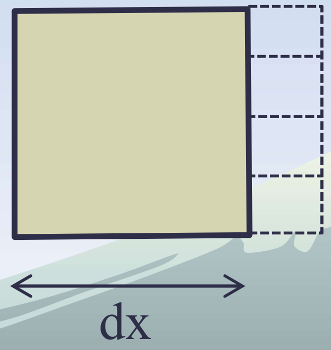
$$\frac{\partial \tau_{XY}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_Y}{\partial y} = 0$$

弾性体の力学(5)

◆ ひずみと変位の関係

直ひずみは同じ方向の変位から生じるが、せん断ひずみは水平および鉛直方向の変位から生じる

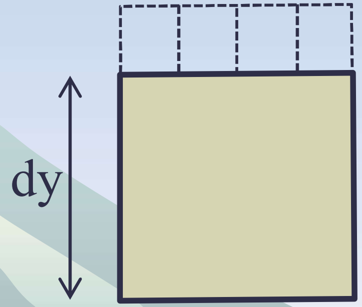
$\frac{\partial u}{\partial x}dx$（x方向の変位増分）



u:x方向変位（水平方向変位）

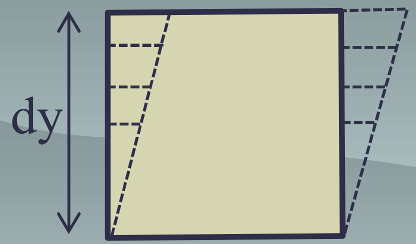
x方向変位uによるx方向直ひずみ $\varepsilon_X = \frac{\partial u}{\partial x}$

$\frac{\partial v}{\partial y}dy$（y方向の変位増分）



v:y方向変位（鉛直方向変位）

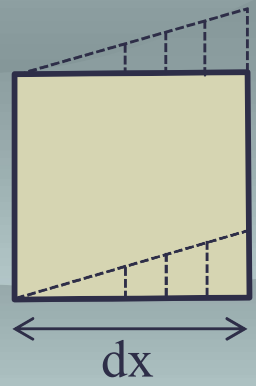
y方向変位vによるy方向直ひずみ $\varepsilon_Y = \frac{\partial v}{\partial y}$



$\frac{\partial u}{\partial y}dy$

x方向変位uによるせん断ひずみ $\gamma_{XY} = \frac{\partial u}{\partial y}$

$\frac{\partial v}{\partial x}dx$

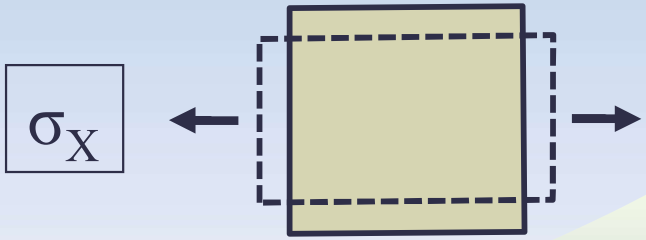


y方向変位vによるせん断ひずみ $\gamma_{XY} = \frac{\partial v}{\partial x}$

せん断ひずみ $\gamma_{XY} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

弾性体の力学(6)

- 応力とひずみの関係



X方向に伸び、Y方向に縮む

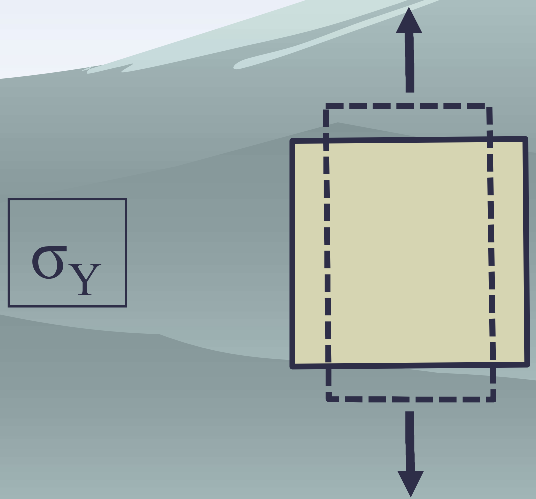
(1)X方向ひずみ $\varepsilon_X = \dfrac{\sigma_X}{E}$ (E:ヤング係数)

組合せる

(2)Y方向ひずみ

ε_Xによって生じるy方向ひずみ(ポアソン効果)

$\varepsilon_Y = \nu\varepsilon_X = \dfrac{\nu}{E}\sigma_X$ (ν:ポアソン比)



Y方向に伸び、X方向に縮む

(1)Y方向ひずみ $\varepsilon_Y = \dfrac{\sigma_Y}{E}$ (E:ヤング係数)

組合せる

(2)X方向ひずみ

ε_Yによって生じるx方向ひずみ(ポアソン効果)

$\varepsilon_X = \nu\varepsilon_Y = \dfrac{\nu}{E}\sigma_Y$ (ν:ポアソン比)

弾性体の力学(7)

◆ 応力とひずみの関係(続き)

2次元のフックの法則

$$\varepsilon_X = \frac{1}{E}\left(\sigma_X - \nu\sigma_Y\right)$$

$$\varepsilon_Y = \frac{1}{E}\left(\sigma_Y - \nu\sigma_X\right)$$

上式が成立するとき、せん断応力とせん断ひずみの間に、次式が成立することが示される。

$$\tau_{XY} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{XY} \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

(G:せん断弾性係数)

上式より、応力をひずみで表すと(応力を未知数として解く)、以下の応力とひずみの関係が得られる。(応力ひずみ関係はEとνの2つのパラメータで表される)

$$\sigma_X = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_X + \nu\varepsilon_Y\right),\ \sigma_Y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_Y + \nu\varepsilon_X\right),\ \tau_{XY} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{XY}$$

弾性体の力学(8)

◆ 仮想仕事の原理

釣り合い状態にある変形体の各点に微小な仮想変位を与えたとき、この仮想変位によって生じる外力のなす仮想仕事と内力のなす仮想仕事が等しい。

$$\int\left(P_X u^* + P_Y v^*\right)ds = \iint\left(\sigma_X \varepsilon_X^* + \sigma_Y \varepsilon_Y^* + \tau_{XY}\gamma_{XY}^*\right)dxdy$$

外部仮想仕事　　　　内部仮想仕事

P_X, P_Y :X方向およびY方向の変形体表面に作用する外力
$\sigma_X, \sigma_Y, \tau_{XY}$:変形体内部に発生する応力
u^*, v^* :X方向およびY方向の仮想変位(仮想系)
$\varepsilon^*_X, \varepsilon^*_Y, \gamma^*_{XY}$:変形体内部に発生する仮想ひずみ(仮想系)

仮想仕事の原理の成立条件:
　対象系の外力P_XおよびP_Yと発生応力σ_X、σ_Yおよびτ_{XY}の間で釣り合い式を満足し、仮想系の変位u^*およびv^*と発生ひずみε^*_X、ε^*_Yおよびγ^*_{XY}の間でひずみと変位の関係式を満足することが必要となる。
　ただし、応力とひずみの関係とは独立に成り立つ。

有限要素モデル(三角形要素)(1)

◆ Nマトリクス(要素内変位と節点変位の関係)

2次元問題での有限要素のうち、最も簡単な三角形要素を例として、その有限要素モデル化の方法を説明する。

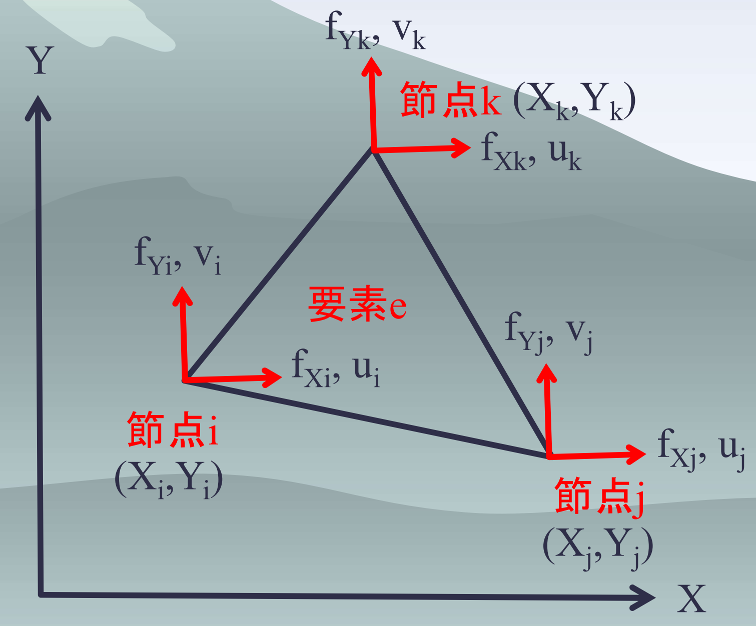
有限要素法では、要素内部の情報(内部変位、応力やひずみなど)を全て節点変位によって表す。まず、要素の内部変位を**節点変位**の関数として表すことが出発点となる。三角形要素では、**要素内変位が要素内で直線的に変化**することとしてモデル化される。(定ひずみ三角形要素)

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

$$v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y$$

u:要素内のX方向変位
v:要素内のY方向変位

上式の係数α_1~α_5は、現在未定だが節点変位と節点座標で表すことを考える。



節点i,j,kは、反時計回りに定義される

有限要素モデル(三角形要素)(2)

◆ Nマトリクス(続き)

節点上において、節点変位と節点座標との関係が成立する。(右式)
この6式をα_1~α_6を未知数として解けば、α_1~α_6が節点変位と節点座標で表すことができる。それを、先ほどの要素内変位の式に代入すると、次式を得る。

$$\begin{cases} u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ v_i = \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i \\ u_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ v_j = \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j \\ u_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k \\ v_k = \alpha_4 + \alpha_5 x_k + \alpha_6 y_k \end{cases}$$

$$u = \frac{1}{2\Delta}\{(a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_k + b_k x + c_k y)u_k\}$$

$$v = \frac{1}{2\Delta}\{(a_i + b_i x + c_i y)v_i + (a_j + b_j x + c_j y)v_j + (a_k + b_k x + c_k y)v_k\}$$

ここに、$a_i = x_j y_k - x_k y_j$, $a_j = x_k y_i - x_i y_k$, $a_k = x_i y_j - x_j y_i$

$b_i = y_j - y_k$, $b_j = y_k - y_i$, $b_k = y_i - y_j$

$c_i = x_k - x_j$, $c_j = x_i - x_k$, $c_k = x_j - x_i$

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$$ (三角形要素の面積)

要素内変位uおよびvをマトリクス表示をすれば、

$\boxed{\{u\} = [N]\{\delta_e\}}$ (要素内変位と節点変位の関係)

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i, N_j, N_k, 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, N_i, N_j, N_k \end{bmatrix}$$ (形状関数)

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$ (要素内変位)

$$\{\delta_e\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}$$ (節点変位)

$$N_i = a_i + b_i x + c_i y$$
$$N_j = a_j + b_j x + c_j y$$
$$N_k = a_k + b_k x + c_k y$$

有限要素モデル（三角形要素）（3）

- Bマトリクス（ひずみと節点変位の関係）

要素内変位と節点変位の関係より、$u = \dfrac{1}{2\Delta}\left\{(a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_k + b_k x + c_k y)u_k\right\}$

$$v = \frac{1}{2\Delta}\left\{(a_i + b_i x + c_i y)v_i + (a_j + b_j x + c_j y)v_j + (a_k + b_k x + c_k y)v_k\right\}$$

ひずみと変位の関係より、 $\varepsilon_X = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ $\varepsilon_Y = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ $\gamma_{XY} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}$

上式より、ひずみを節点変位で表すと、

$$\varepsilon_X = \frac{1}{2\Delta}\left\{b_i u_i + b_j u_j + b_k u_k\right\} = \frac{1}{2\Delta}\left\{(y_j - y_k)u_i + (y_k - y_i)u_j + (y_i - y_j)u_k\right\}$$

$$\varepsilon_Y = \frac{1}{2\Delta}\left\{c_i v_i + c_j v_j + c_k v_k\right\} = \frac{1}{2\Delta}\left\{(x_j - x_k)v_i + (x_k - x_i)v_j + (x_i - x_j)v_k\right\}$$

$$\gamma_{XY} = \frac{1}{2\Delta}\left\{c_i u_i + c_j u_j + c_k u_k + b_i v_i + b_j v_j + b_j v_j\right\} = \frac{1}{2\Delta}\left\{(x_k - x_j)u_i + (x_i - x_k)u_j + (x_j - x_i)u_k + (y_j - y_k)v_i + (y_k - y_i)v_j + (y_i - y_j)v_k\right\}$$

マトリクス表示をすれば、

$\boxed{\{\varepsilon\} = [B]\{\delta_e\}}$ （ひずみと節点変位の関係）

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix}$$ （ひずみ）

$$\{\delta_e\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}$$ （節点変位）

$$[B] = \frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix} y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i & y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \end{bmatrix}$$

（ひずみー変位マトリクス, Bマトリクス）

有限要素モデル（三角形要素）（4）

◆ Dマトリクス（応力とひずみの関係）

弾性体の応力とひずみの関係より、

$$\sigma_X = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_X + \nu\varepsilon_Y)$$

$$\sigma_Y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_Y + \nu\varepsilon_X)$$

$$\tau_{XY} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{XY} = \frac{E}{1-\nu^2}\cdot\frac{1-\nu}{2}\gamma_{XY}$$

マトリクス表示すれば、

$$\boxed{\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{\delta_e\}}$$ （応力と節点変位の関係）

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix} \qquad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} \qquad [D] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$ （平面応力）

（応力）　（ひずみ）　（応力ーひずみマトリクス, Dマトリクス）

剛性マトリクス（三角形要素）（1）

◆ 要素剛性マトリクスの誘導（1）

　三角形要素の**要素剛性マトリクス**（1個の要素に対する剛性マトリクス）を誘導する。三角形要素では、3つの節点を持ち、各節点で水平と鉛直の2つの自由度を有するので、要素剛性マトリクスは**6×6のマトリクス**として誘導される。

　さらに、**全体剛性マトリクス**は、バネ要素の剛性マトリクスで述べたように、各要素剛性マトリクスの共通な自由度を考慮しながら重ね合わせることで作成される。これについては、後述する。

弾性体の仮想仕事の原理は、次式で表される。

$$\int \left(P_X u^* + P_Y v^* \right) ds = \iint \left(\sigma_X \varepsilon_X^* + \sigma_Y \varepsilon_Y^* + \tau_{XY} \gamma_{XY}^* \right) dxdy$$

マトリクス表示すれば、

$$\int \left\{ u^* \right\}^T \left\{ P \right\} ds = \iint \left\{ \varepsilon^* \right\}^T \left\{ \sigma \right\} dxdy$$

ここに、

$\left\{ u^* \right\} = \begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \end{Bmatrix}$（仮想変位）　$\left\{ P \right\} = \begin{Bmatrix} P_X \\ P_Y \end{Bmatrix}$（外力）　$\left\{ \varepsilon^* \right\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_X^* \\ \varepsilon_Y^* \\ \gamma_{XY}^* \end{Bmatrix}$（仮想ひずみ）　$\left\{ \sigma \right\} = \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix}$（応力）

剛性マトリクス(三角形要素)(2)

◆ 要素剛性マトリクスの誘導(2)

外部仮想仕事として、仮想節点変位と節点力を考慮すれば、

$$\int \{u^*\}^T \{P\} ds = \{\delta_e^*\}^T \{f_e\}$$ （外部仮想仕事）

内部仮想仕事として、仮想ひずみと応力を考慮すれば、

$$\iint \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dxdy = \iint ([B]\{\delta_e^*\})^T [D][B]\{\delta_e\} dxdy$$ （内部仮想仕事）

ここで、ひずみと節点変位の関係$\{\varepsilon\}=[B]\{\delta_e\}$と応力と節点変位の関係$\{\sigma\}=[D][B]\{\delta_e\}$を考慮した。

ここに、

$$\{f_e\} = \begin{Bmatrix} f_{Xi} \\ f_{Yi} \\ f_{Xj} \\ f_{Yj} \\ f_{Xk} \\ f_{Yk} \end{Bmatrix}$$ （節点力）

$$\{\delta_e^*\} = \begin{Bmatrix} u_i^* \\ v_i^* \\ u_j^* \\ v_j^* \\ u_k^* \\ v_k^* \end{Bmatrix}$$ （仮想節点変位）

剛性マトリクス（三角形要素）（3）

◆ 要素剛性マトリクスの誘導（3）

仮想内部仕事は、以下のように書ける。

$$\iint \{\varepsilon^*\}^T \{\sigma\} dxdy = \iint \left([B]\{\delta_e^*\}\right)^T [D][B]\{\delta_e\} dxdy$$

$$= \{\delta_e^*\}^T \iint [B]^T [D][B] dxdy \{\delta_e\}$$

$$= \{\delta_e^*\}^T [K]\{\delta_e\}$$

仮想内部仕事と外部仮想仕事を等値すれば、次式を得る。

$$\{\delta_e^*\}^T \left(\{f_e\} - [K]\{\delta_e\}\right) = 0$$

したがって、

$$\{f_e\} = [K]\{\delta_e\}$$ （節点力と節点変位の関係）

ここに、[K]が要素剛性マトリクスであり、次式で表される。

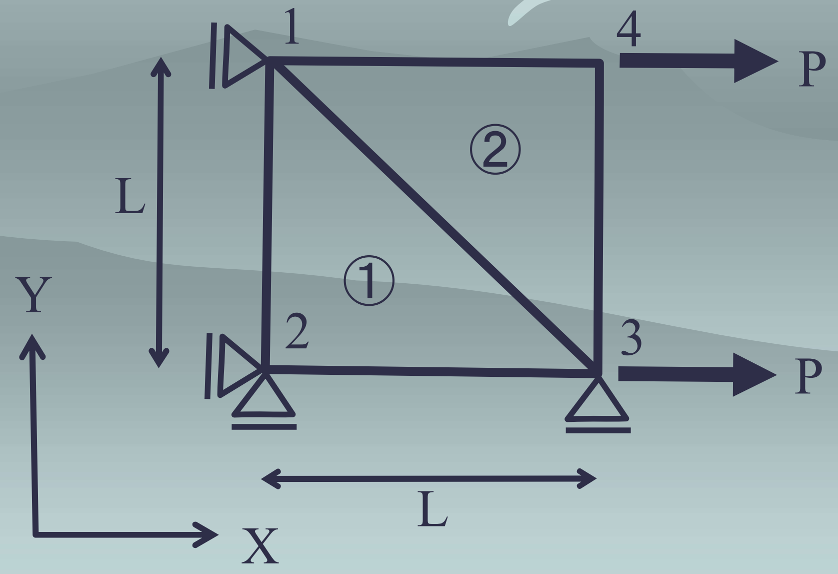
$$[K] = \iint [B]^T [D][B] dxdy$$ （要素剛性マトリクス）

剛性マトリクス（三角形要素）（4）

◆ 全体剛性マトリクスの作成（1）

対象とする構造系全体の剛性マトリクスは、各要素ごとに要素剛性マトリクス（6行・6列）を求め、それらの共通自由度を考慮しながら、全体にわたって重ね合わせることで得られる。

以下では、三角形要素が2個からなる簡単な構造系を例題とし、全体剛性マトリクスの作成方法を説明する。



番号1～4　：節点番号
番号①～②：要素番号

要素①：i,j,k=1,2,3
要素②：i,j,k=1,3,4

要素を定義する節点番号は反時計回りに付番される

剛性マトリクス（三角形要素）（5）

- 全体剛性マトリクスの作成（2）

要素剛性マトリクス

$$[K]=\iint [B]^T[D][B]dxdy$$

ここで、[B]および[D]ともに座標値x,yに無関係であることから、

$$[K]=\Delta[B]^T[D][B]$$ （Δ: 三角形要素の面積）

まず、要素①の要素剛性マトリクスを求める。

本例題の場合、$\Delta=L^2/2$, $y_1-y_3=0$, $y_3-y_1=-L$, $y_1-y_2=L$, $x_3-x_2=L$, $x_1-x_3=-L$ より、マトリクス[B]は、以下のようになる。

$$[B]=\frac{1}{L^2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -L & 0 & L & 0 \\ 0 & L & 0 & -L & 0 & 0 \\ L & 0 & -L & -L & 0 & L \end{bmatrix}$$ （要素①のBマトリクス）

剛性マトリクス(三角形要素)(6)

- 全体剛性マトリクスの作成(3)

$$
[B]^T[D]=\frac{1}{L^2}\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & L \\ 0 & L & 0 \\ -L & 0 & -L \\ 0 & -L & -L \\ L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}=\frac{1}{L^2}\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}L \\ \nu L & L & 0 \\ -L & -\nu L & -\frac{1-\nu}{2}L \\ -\nu L & -L & -\frac{1-\nu}{2}L \\ L & \nu L & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}L \end{bmatrix}
$$

$$
[B]^T[D][B]=\frac{1}{L^4}\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}L \\ \nu L & L & 0 \\ -L & -\nu L & -\frac{1-\nu}{2}L \\ -\nu L & -L & -\frac{1-\nu}{2}L \\ L & \nu L & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}L \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -L & 0 & L & 0 \\ 0 & L & 0 & -L & 0 & 0 \\ L & 0 & -L & -L & 0 & L \end{bmatrix}=\frac{1}{2L^2}\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1-\nu & 0 & \nu-1 & \nu-1 & 0 & 1-\nu \\ & 2 & -2\nu & -2 & 2\nu & 0 \\ & & 3-\nu & 1+\nu & -2 & \nu-1 \\ & & & 3-\nu & -2\nu & \nu-1 \\ & SYM & & & 2 & 0 \\ & & & & & 1-\nu \end{bmatrix}
$$

剛性マトリクス（三角形要素）（7）

- 全体剛性マトリクスの作成（4）

要素①の要素剛性マトリクス

$$
\left[K_e^{①}\right]=\frac{L^2}{2}[B]^T[D][B]=\frac{E}{4(1-\nu^2)}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc}
1-\nu & 0 & \nu-1 & \nu-1 & 0 & 1-\nu \\
 & 2 & -2\nu & -2 & 2\nu & 0 \\
 & & 3-\nu & 1+\nu & -2 & \nu-1 \\
 & & & 3-\nu & -2\nu & \nu-1 \\
 & SYM & & & 2 & 0 \\
 & & & & & 1-\nu
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array}
$$

次に、要素②の要素剛性マトリクスを求める。要素②のマトリクス[B]が次式となることを考慮し、要素①と同様の計算を行う。

$$
[B]=\frac{1}{L^2}\begin{bmatrix}
-L & 0 & 0 & 0 & L & 0 \\
0 & 0 & 0 & -L & 0 & L \\
0 & -L & -L & 0 & L & L
\end{bmatrix}
$$
（要素②のBマトリクス）

剛性マトリクス（三角形要素）（8）

- 全体剛性マトリクスの作成（5）

要素②の要素剛性マトリクス

$$
\left[K_e^{②}\right]=\frac{L^2}{2}[B]^T[D][B]=\frac{E}{4\left(1-\nu^2\right)}
\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{array} & \\
\begin{bmatrix}
2 & 0 & 0 & 2\nu & -2 & -2\nu \\
 & 1-\nu & 1-\nu & 0 & \nu-1 & \nu-1 \\
 & & 1-\nu & 0 & \nu-1 & \nu-1 \\
 & & & 2 & -2\nu & -2 \\
 & SYM & & & 3-\nu & 1+\nu \\
 & & & & & 3-\nu
\end{bmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array}
\end{array}
$$

要素②

要素①の要素剛性マトリクス（再掲）

$$
\left[K_e^{①}\right]=\frac{L^2}{2}[B]^T[D][B]=\frac{E}{4\left(1-\nu^2\right)}
\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{array} & \\
\begin{bmatrix}
1-\nu & 0 & \nu-1 & \nu-1 & 0 & 1-\nu \\
 & 2 & -2\nu & -2 & 2\nu & 0 \\
 & & 3-\nu & 1+\nu & -2 & \nu-1 \\
 & & & 3-\nu & -2\nu & \nu-1 \\
 & SYM & & & 2 & 0 \\
 & & & & & 1-\nu
\end{bmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array}
\end{array}
$$

要素①

剛性マトリクス（三角形要素）（9）

◆ 全体剛性マトリクスの作成（6）

全体剛性マトリクス

$$
\begin{Bmatrix} f_{X1} \\ f_{Y1} \\ f_{X2} \\ f_{Y2} \\ f_{X3} \\ f_{Y3} \\ f_{X4} \\ f_{Y4} \end{Bmatrix}
= \frac{E}{4(1-\nu^2)}
\begin{array}{c}
\begin{matrix} \mathrm{u}_1 & \mathrm{v}_1 & \mathrm{u}_2 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{u}_3 & \mathrm{v}_3 & \mathrm{u}_4 & \mathrm{v}_4 \end{matrix} \\
\begin{bmatrix}
3-\nu & 0 & \nu-1 & \nu-1 & 0 & 1+\nu & -2 & -2\nu \\
 & 3-\nu & -2\nu & -2 & 1+\nu & 0 & \nu-1 & \nu-1 \\
 & & 3-\nu & 1+\nu & -2 & \nu-1 & 0 & 0 \\
 & & & 3-\nu & -2\nu & \nu-1 & 0 & 0 \\
 & & & & 3-\nu & 0 & \nu-1 & \nu-1 \\
 & SYM & & & & 3-\nu & -2\nu & -2 \\
 & & & & & & 3-\nu & 1+\nu \\
 & & & & & & & 3-\nu
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}
$$

節点荷重　　全体剛性マトリクス　　節点変位

：要素①の要素剛性マトリクス成分

：要素②の要素剛性マトリクス成分

剛性マトリクス（三角形要素）（10）

- 変位と反力の計算（1）

剛性方程式の節点荷重および節点変位に既知量を代入する。ここで、節点荷重の既知量は節点に作用する外力、節点変位の既知量は固定節点の変位となる。

$$
\begin{Bmatrix} f_{X1} \\ 0 \\ f_{X2} \\ f_{Y2} \\ P \\ f_{Y3} \\ P \\ 0 \end{Bmatrix}
= \frac{E}{4(1-\nu^2)}
\begin{bmatrix}
3-\nu & 0 & \nu-1 & \nu-1 & 0 & 1+\nu & -2 & -2\nu \\
 & 3-\nu & -2\nu & -2 & 1+\nu & 0 & \nu-1 & \nu-1 \\
 & & 3-\nu & 1+\nu & -2 & \nu-1 & 0 & 0 \\
 & & & 3-\nu & -2\nu & \nu-1 & 0 & 0 \\
 & & & & 3-\nu & 0 & \nu-1 & \nu-1 \\
 & SYM & & & & 3-\nu & -2\nu & -2 \\
 & & & & & & 3-\nu & 1+\nu \\
 & & & & & & & 3-\nu
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} 0 \\ v_1 \\ 0 \\ 0 \\ u_3 \\ 0 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}
$$

：既知の荷重および変位

次に、節点変位の未知量を上部に移動させ、それに伴い節点荷重および剛性マトリクスの位置を並べ替える。

剛性マトリクス（三角形要素）（11）

- 変位と反力の計算（2）

　変位の未知量を上部に、変位の既知量を下部に移動させ、並び替えを行った剛性方程式

荷重が既知

荷重が未知

変位が未知

変位が既知

$$
\left\{\begin{array}{c} 0 \\ P \\ P \\ 0 \\ \hline f_{X1} \\ f_{X2} \\ f_{Y2} \\ f_{Y3} \end{array}\right\}
= \frac{E}{4(1-\nu^2)}
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
3-\nu & 1+\nu & \nu-1 & \nu-1 & 0 & -2\nu & -2 & 0 \\
 & 3-\nu & \nu-1 & \nu-1 & 0 & -2 & -2\nu & 0 \\
\mathrm{SYM} & & 3-\nu & 1+\nu & -2 & 0 & 0 & -2\nu \\
 & & & 3-\nu & -2\nu & 0 & 0 & -2 \\
\hline
0 & 0 & -2 & -2\nu & 3-\nu & \nu-1 & \nu-1 & 1+\nu \\
-2\nu & -2 & 0 & 0 & & 3-\nu & 1+\nu & \nu-1 \\
-2 & -2\nu & 0 & 0 & \mathrm{SYM} & & 3-\nu & \nu-1 \\
0 & 0 & -2\nu & -2 & & & & 3-\nu
\end{array}\right]
\left\{\begin{array}{c} v_1 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}
$$

　未知変位と既知変位に分けた剛性方程式から、変位および反力を算出する次式が得られる。

剛性マトリクス（三角形要素）（12）

- 変位と反力の計算（3）

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 3-\nu & 1+\nu & \nu-1 & \nu-1 \\ & 3-\nu & \nu-1 & \nu-1 \\ \mathrm{SYM} & & 3-\nu & 1+\nu \\ & & & 3-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} f_{X1} \\ f_{X2} \\ f_{Y2} \\ f_{Y3} \end{Bmatrix} = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -2\nu \\ -2\nu & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\nu & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

　上記の式(1)の連立一次方程式を解くことにより、4つの未知変位を求めることができる。さらに、求められた変位を式(2)に代入することにより、4つの反力を求めることができる。

　その結果、変位は$u_3=u_4=2P/E$および$v_1=v_4=-2P\nu/E$、反力は$f_{X1}=f_{X2}=-P$および$f_{Y2}=f_{Y3}=0$が得られる。

まとめ

(1)バネの力学

バネを例にとり剛性マトリクスの概念を説明し、単一要素の剛性マトリクスを重ね合わせることで全体剛性マトリクスが作成できることを示した。

(2)弾性体の力学

有限要素法で必要となる応力とひずみの概念を説明した。また、弾性体の2次元問題における基礎方程式が、①釣り合い方程式、②ひずみと変位の関係、および③応力とひずみの関係の3つになることを示した。さらに、釣り合い方程式と等価となる仮想仕事の原理を示した。

(3)有限要素のモデル化

有限要素のモデル化は、要素内部の変位を節点変位で表すことから始まる。その結果、要素内変位と節点変位の関係を表すNマトリクスやひずみと節点変位を表すBマトリクスが導かれる。また、応力とひずみの関係から、Dマトリクスが得られる。

(4)要素剛性マトリクス

仮想仕事の原理を用いて、要素剛性マトリクスが得られる。要素剛性マトリクスは、BおよびDマトリクスを用い、要素内座標値の積分の形で求めることができる。

(5)全体剛性マトリクス

要素剛性マトリクスを、全ての要素について計算し、それらを共通自由度を考慮して重ね合わせることで、全体剛性マトリクスが得られる。

(6)変位と反力の計算

全体剛性マトリクスを用いた剛性方程式を、未知変位と既知変位により並び替えを行い、未知変位の自由度に対する連立方程式を解くことで、変位が求められる。さらに、既知変位に対する式から反力が求められる。