

地下構造物の耐震問題への理論解の活用

日中コンサルタント株式会社 松原勝己
東電設計株式会社 本田国保

はじめに

現在、地盤や構造物の耐震的検討を行う場合には、コンピュータを使った数値解析を駆使することが、実務レベルにおいても常識となっている。コンピュータが出現する以前には、構造物や地盤を簡単な構造と境界条件でモデル化して求められた理論解による方法しかなかったと言える。実際に解きたい実務的問題というのは、構造物や地盤とも複雑な構造を有しており、境界条件も簡単ではないために、実際近い状態の挙動を推定するためには、コンピュータを使った数値解析が非常にパワフルなものになる。

しかしながら、設計の前段階において大枠の方向性を決定するときの有用性や、解析結果の分析・評価の判り易さという点については、理論解には捨てがたい長所があるものと考えられる。

ここでは、現在、余りに当たり前となった高度な数値解析技術の影で目立たなくなっている理論解の有用性を再確認するために、地下構造物の耐震問題における活用例を紹介してみたい。

1. 線状地中構造物の軸方向耐震検討における地盤ばねに関して

共同溝や水道管路などの地中構造物の軸方向耐震検討では、構造物を梁要素で地盤をばねでモデル化し、ばね端に地震時変位を作用させて照査を行う応答変位法が用いられることが多い。この際、地盤ばねの評価が重要になるが、設計指針では、地盤のせん断弾性係数の定数倍で求めるという考え方がある。

設計指針では、この地盤ばねの係数値を経験的に1.0や3.0などに設定されることがあるが、この考え方や値の妥当性に関して、理論的にどこまで説明が可能かを考えてみたい。なぜ地盤ばねが地盤せん断弾性係数に比例するのか、その係数値は地盤のどのようなパラメータに依存するのかなど、理論解を基に考察を加える。

簡単な偏微分方程式の解法や特殊関数（ベッセル関数）の知識が必要になるが、できるだけわかりやすい説明を試みたいと思う。

2. 水平地盤の地震時変位に関して

地下構造物は、一般に地盤に囲まれているため、地震時の地盤変形の影響を大きく受けると言える。したがって、地下構造物の耐震検討では、地震時の地盤変位量を推定することが重要な位置を占める。

設計指針では、比較的均質な地盤の場合には、地震時地盤変位の推定式が、比較的簡単な形で提示されている。その推定式を定めるパラメータは、表層厚、構造物深さ、地盤の一次固有周期、および基盤地震動の速度応答スペクトルであるが、これらが何ゆえにそうなるのかを、地震時における地盤震動の基本から説き起こしてみたい。

それによって、各項や係数値の意味が明らかになり、設計指針の適用範囲を把握できる

ことに繋がると思う。

3. 地中ボックスカルバートの地震時応答に関して

既設地下構造物の耐震診断を行う際には、構造物が地盤内に設置されるので、地盤と構造物の相互作用を考慮して地震時応答を推定する必要がある。そのため、構造物と地盤の双方をモデル化した応答変位法や動的 FEM 解析などが適用される。しかしながら、危険箇所のスクリーニングを迅速に行いたい場合などでは、地盤連成解析を用いずに地下構造物の地震時応答が推定できると便利である。

ここでは、応答変位法の概念に基づいて、地盤と構造物の相互作用を考慮した構造物応答変位の推定式を、理論的に誘導してみる。また、その推定式の精度を動的 FEM を用いて検証した結果についても述べる。

目 次

	ページ
1. 線状地中構造物の軸方向耐震検討における地盤ばねに関して	1
1. 1 線状地中構造物の軸方向耐震設計の概要	1
1. 2 地盤ばね定数の理論解による検討（その1：動的）	2
1. 3 地盤ばね定数の理論解による検討（その2：静的）	11
2. 水平地盤の地震時変位に関して	16
2. 1 耐震設計指針類における地震時地盤変位	16
2. 2 地震時地盤変位の算定式の理論的な誘導	17
2. 3 水平多層地盤への拡張	21
3. 地中ボックスカルバートの地震時応答に関して	26
3. 1 地震時変形量の算定式の誘導	26
3. 2 計算例	31
参考資料 1-1 3次元弾性体の運動方程式について	34
1. 応力の定義	34
2. 力の釣り合い方程式	35
3. ひずみと変位の関係	37
4. 応力・ひずみ関係	38
5. 弾性体の運動方程式	42
参考資料 1-2 波動方程式について	45
参考資料 1-3 ベッセル関数について	48
1. ベッセル関数	48
2. ベッセル関数の漸近展開	50
参考資料 2-1 応答スペクトルについて	53
1. 応答スペクトルの概念	53
2. 一自由度系の振動（正弦波加震）	54
3. 一自由度系の振動（地震波加震：二ガム法）	63
参考資料 2-2 地盤の自由振動解について	70
参考資料 3-1 表層地盤の加速度分布について	72

1. 線状地中構造物の軸方向耐震設計における地盤ばねに関して

1. 1 線状地中構造物の軸方向耐震検討の概要

共同溝やトンネルなど、いわゆる線状地中構造物の軸方向の耐震設計に関しては、線状地中構造物を梁で、その周辺地盤を地盤ばねでモデル化し、地盤ばね端に地震時地盤変位を作用させて検討を行う、応答変位法が実施されることが多い。

図 1-1 は、現状の耐震指針における検討フローの一例を示したものである。

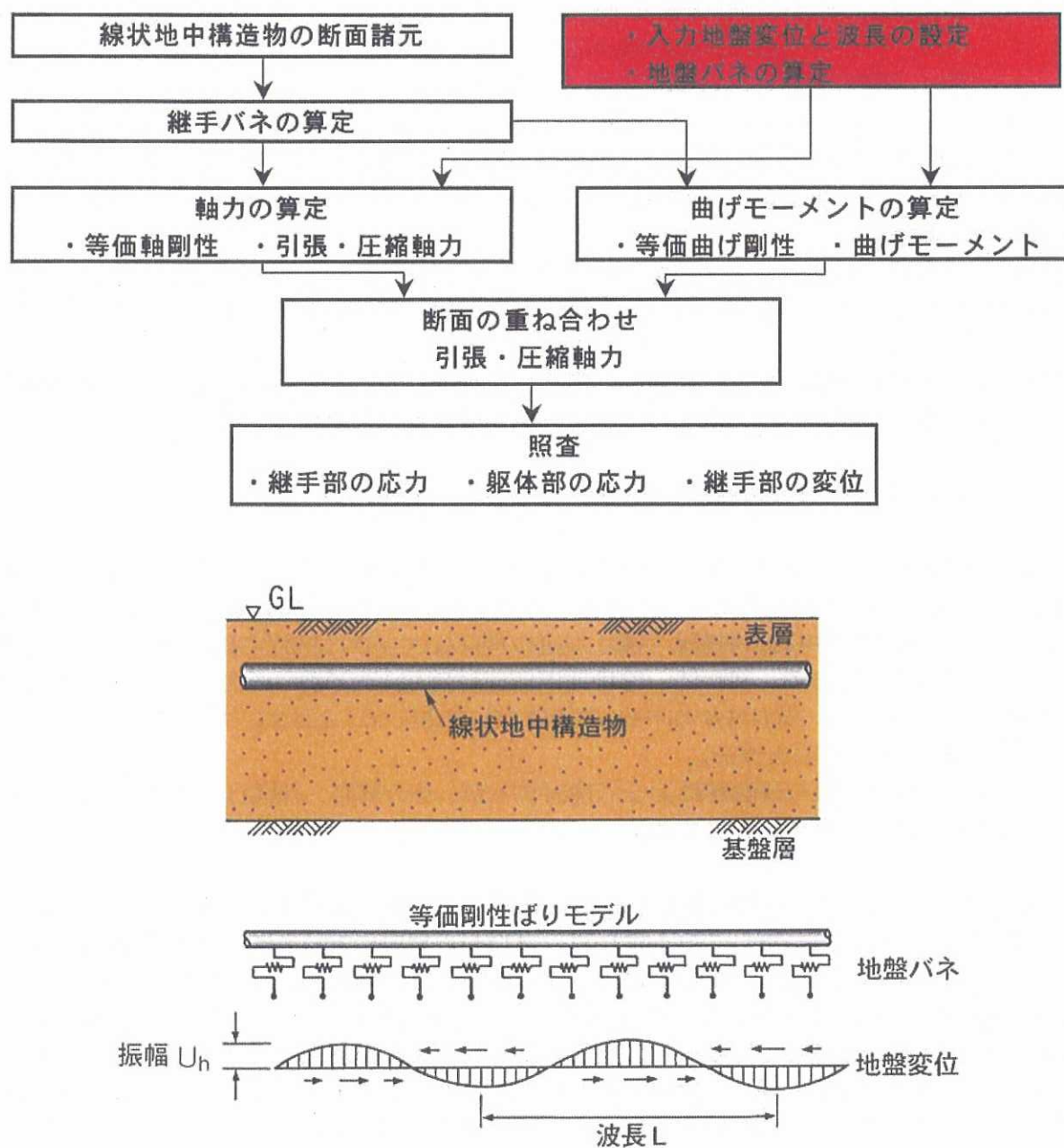


図 1-1 耐震設計指針の概要（線状地中構造物の軸方向耐震検討）

図 1-1 の検討フローにおいて、不確定要因になりやすい項目として、周辺地盤をモデル化した地盤ばねの大きさの設定がある。

例えば、共同溝設計指針（1986）では、以下のような記述がある。

「共同溝設計指針 p74～75」から引用

共同溝の縦断（軸）方向、これに直交する水平面内および鉛直面内に関する地盤の剛性係数（地盤バネ定数） K_1 、 K_2 および K_3 〔単位： tf/m^2 〕は、次式で算出してよい。

$$\begin{aligned} K_1 &= C_1 G_s \\ K_2 &= C_2 G_s \\ K_3 &= C_3 G_s \end{aligned} \tag{1-1}$$

ここに、 C_1, C_2, C_3 ：地盤の剛性係数 K_1, K_2, K_3 に対する定数で実験等による調査結果に基づいて定めるのが望ましい。一般には C_1, C_2 は1.0、 C_3 は3.0としてよい。

G_s ：表層地盤のせん断変形係数〔単位： tf/m^2 〕

上記において、 $K_1 \sim K_3$ までの地盤ばね定数の値が、地盤のせん断弾性係数の定数倍で表されることになっているが、この方法は、各種の設計指針において比較的良好に採用されているものである。

ただし、地盤ばね定数の大きさが、地盤のせん断弾性係数に比例する形で示され、またその係数値が1.0あるいは3.0となることについては、「経験的なもの」というようなニュアンスが感じられる。

そこで、本項目では、それらの背景に関し、合理的な理由を明らかにすることを目的として、できるだけ理論的な方法でのアプローチを試みることにする。

1. 2 地盤ばね定数の理論解による検討（その1：動的）

式(1-1)によれば、係数値が無次元量であるので、地盤ばね定数は、せん断弾性係数と同次元、すなわち tf/m^2 になることがわかる。この軸方向の地盤ばね定数の次元が、 tf/m^2 になる理由は、線状地中構造物縦断（軸）方向の単位長さ当りに相当するばね定数の大きさを定めていることにある。例えば、線状地中構造物軸方向の延長5mあたりに1本のばねを配置する場合には、式(1-1)の $K_1 \sim K_3$ の値に5mを乗じることによって、1本の地盤ばね（次元： tf/m ）の大きさとなる。

以下では、地盤ばねを理論解によって検討するが、その前に、「ばね」とは何であったかを、再度考え直してみることにする。

図 1-2 に示すように、ばねに作用する力と伸び量との関係を考えてみる。

すなわち、ばねが天井からぶら下げられ、自然長の状態にあるとき、力 F を作用させて伸び量 X がどうなるかという問題である。これは、ばね定数を K としたとき、 $F=K \cdot X$ が成立するので、伸び量 X が、 $X=F/K$ で求められることになる。この $F=K \cdot X$ なる関係は、ばねが押されると反発して押し返し、引張られると引張り返すという性質があり、その力の大きさが伸び量（縮み量）に比例するというを表している。このとき、比例定数がばね定数 K に相当する。このばね定数のことを、慣用的に「ばねの大きさ」とか「ばね」と呼ばれるわけである。

したがって、ばね定数 K が $K=F/X$ で表されるので、ばね定数とは、単位長さの変位をばねに与えたときの反発力の大きさであると言える。これは、ばねが硬い（強い）ほど、ばね定数が大きいことを表している。

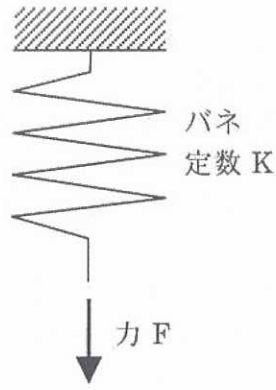


図 1-2 ばねに働く力と伸び量

上記に述べた「ばね」に関することは、変形する物体に対して一般的に言えることで、地盤材料についても（ひずみは小さい領域では）成立する性質である。したがって、一般的には、地盤に力ないし変位を作用させて、そのときの力-変位の関係から、地盤ばね定数を求めることができる。

以下では、線状地中構造物の地盤ばねを考えてみる。

図 1-3 に示すように、線状地中構造物にモデル化される地盤ばねは 3 種類ある（共同溝指針の $K_1 \sim K_3$ に相当）が、ここでは、 K_1 ばね（軸方向）を取り上げる。このばねは、線状地中構造物が軸方向に変位したとき、地盤から構造物が受ける力に関係するものである。以下では、 K_1 がどういうパラメータに依存するのか、理論解析的アプローチ（動弾性論）により求めてみる。

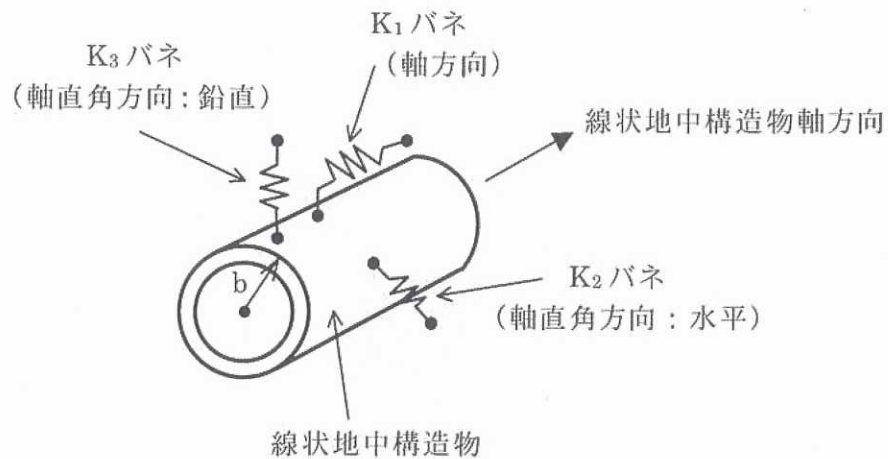


図 1-3 地盤ばねの 3 成分

円形断面の線状地中構造物を仮定し、構造物外面に外力を作用させて、その際に得られる力と変位の関係から地盤ばねを算定する。

図 1-4 に示すように、線状地中構造物外面 (b: 断面中心から構造物外面までの長さ) に、大きさ p、円振動数 ω を有するせん断応力を、線状地中構造物軸方向 (紙面直角方向) に作用させたとき、構造物外面に発生する動的な応答変位を求めてみる。

線状地中構造物の軸方向を z 軸の正方向にとることとする。z 方向に対する弾性体と運動方程式 (動的釣り合い式) は、式(1-2)で表される (参考資料 1-1 を参照)。

$$G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1-2)$$

ここに、G: 地盤のせん断係数、u,v,w: x,y,z 方向の地盤変位、 ν : 地盤のポアソン比、 ρ : 地盤の密度 である。

いま、2次元応力状態であることから、 $\partial/\partial z = 0$ (z 方向に変位が一定) を考慮すれば、式(1-2)は、式(1-3)に簡単化される。

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{V_s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1-3)$$

ここに、 V_s : 地盤のせん断波速度であり、 $V_s = \sqrt{G/\rho}$ の関係を用いた (参考資料 1-2 参照)。

式(1-3)を、振動数領域 (荷重が理想的な正弦波で変動するときの解) で表すために、 $w = We^{i\omega t}$ と置けば、式(1-4)が得られる。

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{V_s^2} W = 0 \quad (1-4)$$

ここに、W: 変位 w の複素フーリエ振幅、 ω : 円振動数 である。

式(1-4)を、r- θ の極座標系で書き直せば、式(1-5)が得られる。

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \frac{\omega^2}{V_s^2} W = 0 \quad (1-5)$$

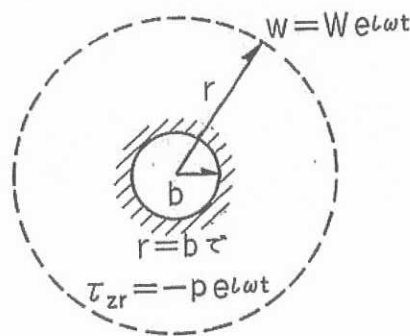


図 1-4 動的ばねを算定するための解析モデル

図 1-4 において、半径 b の位置に一様なせん断応力を作用させているので、変位 w は周方向 (θ 方向) に一定となることから、 $\partial/\partial\theta = 0$ を考慮すれば、式(1-6)を得る。

$$\frac{d^2W}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} + \frac{\omega^2}{V_s^2} W = 0 \quad (1-6)$$

式(1-6)は、 W が r のみの関数となるので、偏微分記号から常微分記号に書き換えたものである。この式(1-6)が、トンネル外面に動的な力を作用させたときの支配方程式となる。この方程式を、地中構造物外面における境界条件、 $r=b$ において $\tau_{rz} = -pe^{i\omega t}$ を満たすように解けばよい。

式(1-6)に、変数変換 $W_1 = \omega^2/V_s^2 W$ 、 $r_1 = \omega/V_s r$ を施せば、式(1-7)が得られる。

$$\frac{d^2W_1}{dr_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{dW_1}{dr_1} + W_1 = 0 \quad (1-7)$$

式(1-7)は、0 次のベッセル方程式になることから、式(1-7)の一般解は、式(1-8)で表される (参考資料 1-3 参照)。一般には、式(1-7)の解は、1 種および 2 種のハンケル関数の線形結合和で表されるが、波動成分が地中構造物中心から遠方に向かって進むものしか存在しないので、ここでは 2 種のみ解となる (なお、1 種ではなく 2 種を選ぶ理由は、時間項 $e^{i\omega t}$ を選んだときに 2 種の方が空間軸 r の正方向に進む波となることに関係する)。

$$W_1 = c_1 H_0^{(2)}(r_1) \quad (1-8)$$

ここに、 $H_0^{(2)}$: 0 次の第 2 種ハンケル関数である。

式(1-8)は、変数 W と r で表すと、式(1-9)に書き直すことができる。

$$W = c H_0^{(2)}\left(\frac{\omega r}{V_s}\right) \quad (1-9)$$

ここに、 c : 地中構造物外面の境界条件により定められる積分定数 である。

次に、式(1-9)の定数 c を定める。トンネル外面でのせん断応力が、 $-pe^{i\omega t}$ に等しいことから、式(1-10)が成立する。

$$\left(\tau_{rz}\right)_{r=b} = \left(G \frac{\partial W}{\partial r}\right)_{r=b} = -p \quad (1-10)$$

ここに、 b : トンネル外面の半径 である。

式(1-9)を用いて、式(1-10)を計算すれば、式(1-11)を得る。

$$\left(G \frac{\partial W}{\partial r}\right)_{r=b} = -\frac{Gc\omega}{V_s} H_1^{(2)}\left(\frac{\omega b}{V_s}\right) = -p \quad (1-11)$$

ここに、式(1-11)の計算には、ハンケル関数の微分公式

$$\frac{d}{dz} H_0^{(2)}(z) = -H_1^{(2)}(z)$$

を用いた。

したがって、式(1-11)より、定数 c は式(1-12)で表すことができる。

$$c = \frac{pV_s}{G\omega} \frac{1}{H_1^{(2)}\left(\frac{\omega b}{V_s}\right)} \quad (1-12)$$

以上で積分定数 c が求められたので、式(1-9)と(1-12)を用いて、トンネル外面に正弦的な外力を作用させたときの変位（振動数領域）が、式(1-13)で得られる。

$$W = \frac{pV_s}{G\omega} \frac{H_0^{(2)}\left(\frac{\omega r}{V_s}\right)}{H_1^{(2)}\left(\frac{\omega b}{V_s}\right)} \quad (1-13)$$

式(1-13)で動的な変位が得られたので、次に地盤バネ定数を計算する。線状地中構造物軸方向の単位長さあたりに換算したバネになることに注意して、地盤バネ定数 $k^*(\omega)$ は、トンネル外面における力と変位の関係から、式(1-14)で表される。ここで、肩に付与した * は、動的バネが一般に複素数になることを示すためである。

$$2\pi b \cdot 1 \cdot p = k^*(\omega) \cdot (W)_{r=b} \quad (1-14)$$

すなわち、

$$\begin{aligned} k^*(\omega) &= \alpha^*(\omega) \cdot G \\ \alpha^*(\omega) &= 2\pi a_0 \frac{H_1^{(2)}(a_0)}{H_0^{(2)}(a_0)} \\ a_0 &= \frac{\omega b}{V_s} \end{aligned} \quad (1-15)$$

ここに、 a_0 : 無次元振動数 である。

さらに、ベッセル関数とハンケル関数の関係式

$$\begin{aligned} H_0^{(2)}(a_0) &= J_0(a_0) - iN_0(a_0) \\ H_1^{(2)}(a_0) &= J_1(a_0) - iN_1(a_0) \end{aligned}$$

を用い、地盤バネ定数を実部と虚部に分離して示せば、動的な地盤バネ定数の表示として、式(1-16)が得られる。

ここに、 J_0, J_1, N_0, N_1 : 0 次および 1 次のベッセル関数、0 次および 1 次のノイマン関数である。

$$\begin{aligned} k^*(\omega) &= k(\omega) \{1 + 2i\beta(\omega)\} \\ k(\omega) &= \alpha(\omega) \cdot G \\ \alpha(\omega) &= 2\pi a_0 \frac{J_1(a_0)J_0(a_0) + N_1(a_0)N_0(a_0)}{\{J_0(a_0)\}^2 + \{N_0(a_0)\}^2} \\ \beta(\omega) &= \frac{J_1(a_0)N_0(a_0) - N_1(a_0)J_0(a_0)}{2\{J_1(a_0)J_0(a_0) + N_1(a_0)N_0(a_0)\}} \end{aligned} \quad (1-16)$$

式(1-16)において、動的地盤バネ定数は複素数値となるが、その実部が $k(\omega)$ がバネ定数を表すことになる。また、虚部は波動逸散効果による減衰を表す。これについては、一次元波動解析コード SHAKE などで使用される複素剛性を思い出してほしい。

さらに、虚部の形を $2i\beta(\omega)k(\omega)$ としているのは、上記の $\beta(\omega)$ が減衰定数の定義と一致させるためである。

式(1-16)において、地盤バネ定数の係数値 $\alpha(\omega)$ が振動数 ω の関数になっている（振動数依存性）ことに注意する必要がある。

上記の $\alpha(\omega)$ を、エクセルを用いて図化したものを、図 1-5 に示す。図 1-5 によれば、 α は無次元振動数 $\omega b/V_s$ が大きくなるにつれて増大する。無次元振動数 0 では係数値 α は 0 となり、無次元振動数が大きくなると $\pi (=3.1415)$ に漸近することがわかる。すなわち、最大でも π を超えないことを示している。したがって、地中構造物の耐震性照査において、地盤バネが大きいほど、構造物の発生ひずみが大きくなることを考慮すれば、軸方向地盤バネ定数の係数値 α として 3.0 を採用することに、一つの根拠を与えるものと考えられる。

図 1-6 に、係数値 $\alpha(\omega)$ 、 $\beta(\omega)$ および $|\alpha^*(\omega)|$ を示す。

図からわかるように、減衰定数に相当する $\beta(\omega)$ は、振動数の増加とともに、直線的に増加し、振動数の大きい領域では、無次元振動数 $\omega b/V_s$ に近づくことがわかる。

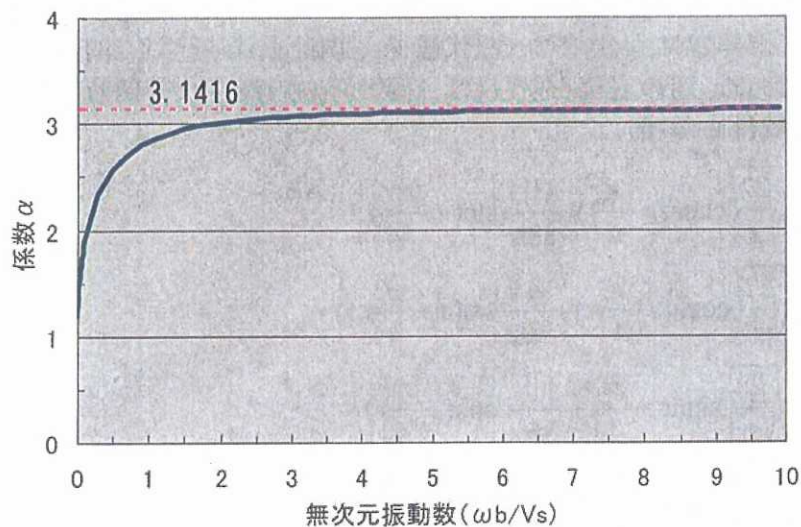


図 1-5 動的地盤バネ定数の係数値 α

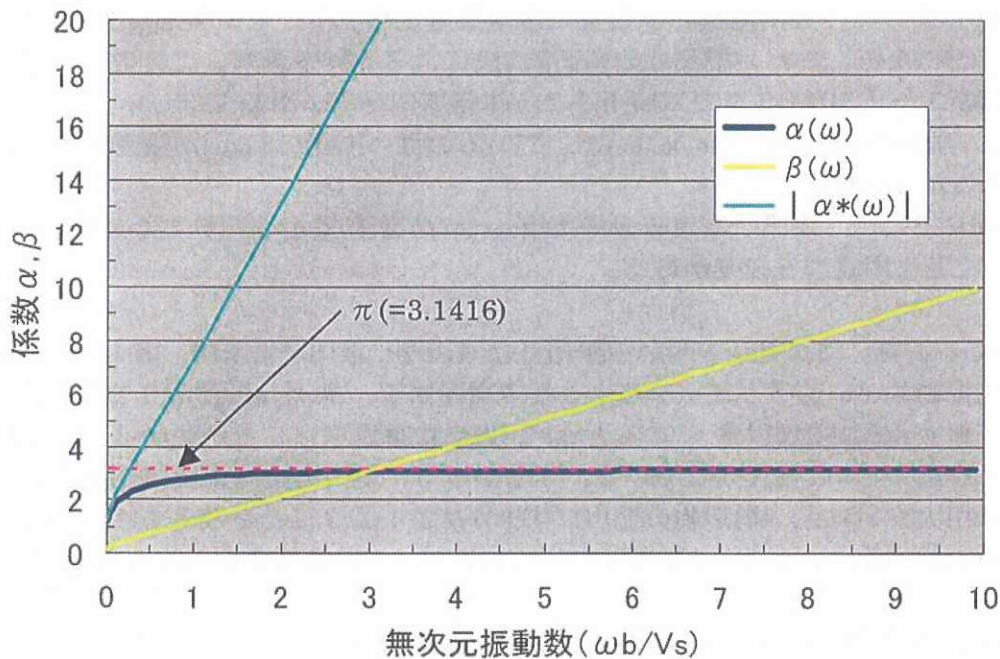


図 1-6 動的地盤ばね定数の係数値 α 、 β および $\alpha^*(\omega)$

上記の通り、地中構造物の軸方向地盤バネ定数 k の地盤せん断弾性係数 G に対する比 α ($k=\alpha G$) は、振動数依存性を有するが、その振動数が大きくなると、円周率 $\pi(=3.1415\dots)$ に近づくことが、数値計算で確かめられることがわかる。

以下では、式(1-16)で示される剛性係数 $\alpha(\omega)$ が、 $\omega \rightarrow \infty$ で、 π に漸近することを、数理的に示してみたい。

吉田耕作ら著「応用数学便覧(p.419)」(丸善)によれば、ベッセル関数の漸近展開を用いると、以下の式(1-17)のように示される。漸近展開というのは、簡単にいうと、ある関数 $f(z)$ があつたとき、 z が非常に大きくなった状態で、関数 $f(z)$ が近づく関数形をべき乗の形で表すということである。別の表現をすれば、関数 $f(z)$ の漸近線の関数形を求めるとも言い換えられる(参考資料 3 参照)。

$$\begin{aligned}
 J_0(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8z} \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \\
 J_1(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \cos\left(z - \frac{3}{4}\pi\right) - \frac{3}{8z} \sin\left(z - \frac{3}{4}\pi\right) \right\} \\
 N_0(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{8z} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \\
 N_1(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \sin\left(z - \frac{3}{4}\pi\right) + \frac{3}{8z} \cos\left(z - \frac{3}{4}\pi\right) \right\}
 \end{aligned} \tag{1-17}$$

少し注意をしておく、以下の議論では、上式において $1/z$ までの項を考慮するのが、必要である。念のために言うておくと、一般に漸近展開というのは、さらに $1/z^2$ 、 $1/z^3 \dots$

の項が続くのであるが、上式では、 $1/z^2$ 以上の項を省略した（それ以上の項を小さいとして無視した）ということである。

まず、式(1-16)の分母を計算する。

$$\begin{aligned}
 J_0^2 + J_1^2 &= \frac{2}{\pi z} \left[\left\{ \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8z} \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \right\}^2 + \left\{ \cos\left(z - \frac{3}{4}\pi\right) - \frac{3}{8z} \sin\left(z - \frac{3}{4}\pi\right) \right\}^2 \right] \\
 &= \frac{2}{\pi z} \left[\cos^2\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(z - \frac{3}{4}\pi\right) + \frac{1}{4z} \left\{ \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) - 3 \sin\left(z - \frac{3}{4}\pi\right) \cos\left(z - \frac{3}{4}\pi\right) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{64z^2} \left\{ \sin^2\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + 9 \sin^2\left(z - \frac{3}{4}\pi\right) \right\} \right] \\
 &= \frac{2}{\pi z} \left[1 - \frac{1}{2z} \cos 2z + \frac{1}{64z^2} (5 + 4 \sin 2z) \right]
 \end{aligned} \tag{1-18}$$

次に、式(1-16)の分子を計算する。

$$\begin{aligned}
 2(J_0 J_1 + N_0 N_1) &= \frac{4}{\pi z} \left[\cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(z - \frac{3}{4}\pi\right) + \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(z - \frac{3}{4}\pi\right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2z} \left\{ \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(z - \frac{3}{4}\pi\right) - \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(z - \frac{3}{4}\pi\right) \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{64z^2} \left\{ \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(z - \frac{3}{4}\pi\right) - \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(z - \frac{3}{4}\pi\right) \right\} \right] \\
 &= \frac{4}{\pi z} \left[\frac{1}{2z} - \frac{3}{64z^2} \cos 2z \right]
 \end{aligned} \tag{1-19}$$

ここに、式(1-19)において、1のオーダーの項がゼロになることが、本質的に重要である。式(1-18)および(1-19)より、

$$\begin{aligned}
 z \frac{2(J_0 J_1 + N_0 N_1)}{J_0^2 + J_1^2} &= 2z \frac{\frac{1}{2z} - \frac{3}{64z^2} \cos 2z}{1 - \frac{1}{2z} \cos 2z + \frac{1}{64z^2} (5 + 4 \sin 2z)} \\
 &= \frac{1 - \frac{3}{32z} \cos 2z}{1 - \frac{1}{2z} \cos 2z + \frac{1}{64z^2} (5 + 4 \sin 2z)}
 \end{aligned} \tag{1-20}$$

したがって、

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \frac{2(J_0 J_1 + N_0 N_1)}{J_0^2 + J_1^2} = 1 \tag{1-21}$$

なお、式(1-21)が成立する理由を言葉で表現すると、以下の通りである。すなわち、 z が大きくなると、分母の $J_0^2 + J_1^2$ が $1/z$ のオーダーで小さくなるのに対して、分子の $2(J_0 J_1 + N_0 N_1)$ が $1/z^2$ のオーダーで小さくなることから（分子の方が分母よりもゼロに近づく

スピードが大きい)、 $z \cdot 2(J_0 J_1 + N_0 N_1) / (J_0^2 + J_1^2)$ が1に近づくとと言える。

以上から、式(1-21)を考慮すれば、式(16)において、 $a_0 \rightarrow \infty$ のとき、 $\alpha(\omega) \rightarrow \pi$ となることがわかる。すなわち、振動数が大きくなると、剛性係数 $\alpha(\omega)$ が π に近づくとということになる。

次に、振動数の大きいところでの $\beta(\omega)$ の性質を調べてみる。

式(1-17)を用いると、

$$\begin{aligned} J_1 N_0 - N_1 J_0 &= \frac{2}{\pi z} \left\{ \cos\left(z - \frac{3}{4}\pi\right) - \frac{3}{8} \frac{1}{z} \sin\left(z - \frac{3}{4}\pi\right) \right\} \left\{ \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{8} \frac{1}{z} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \\ &\quad - \frac{2}{\pi z} \left\{ \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8} \frac{1}{z} \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \left\{ \sin\left(z - \frac{3}{4}\pi\right) + \frac{3}{8} \frac{1}{z} \cos\left(z - \frac{3}{4}\pi\right) \right\} \quad (1-22) \\ &= \frac{2}{\pi z} \left(1 - \frac{3}{64} \frac{1}{z^2} \right) \end{aligned}$$

したがって、

$$\frac{J_1 N_0 - N_1 J_0}{2\{J_1 J_0 + N_1 N_0\}} = \frac{\frac{2}{\pi z} \left(1 - \frac{3}{64} \frac{1}{z^2} \right)}{\frac{4}{\pi z} \left(\frac{1}{2z} - \frac{3}{64} \frac{1}{z^2} \cos 2z \right)} = z \frac{1 - \frac{3}{64} \frac{1}{z^2}}{1 - \frac{3}{32} \frac{1}{z} \cos 2z} \quad (1-23)$$

すなわち、

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{J_1 N_0 - N_1 J_0}{2(J_1 J_0 + N_1 N_0)} = z \quad (1-24)$$

したがって、式(1-16)より、 $a_0 \rightarrow \infty$ のとき、 $\beta(\omega) \rightarrow a_0$ となることがわかる。

以上から、複素バネ定数 $k^*(\omega)$ は、振動数 ω が非常に大きいとき、次式が成立する。

$$k^*(\omega) = \pi G \left(1 + 2i \frac{\omega b}{V_s} \right) \quad (1-25)$$

図 1-7 に、 $\alpha(\omega)$ および $\beta(\omega)$ と、 ω が大きいところでの α と β の近似値を示す。

静的な応答変位法では、ばねの振動数依存性を直接考慮するのが困難であることから、安全側の結果となるように、式(1-25)を用いて大きめに設定するのが一つの方法になる。なお、式(1-25)から、剛性を表す実部は、 πG になるが、本解析モデルでは、無限地盤内の地下構造物を仮定しており、地表面の影響を考慮すれば、この値よりも小さくなると考えられる。静的な検討で、地表面付近に地下構造物が存在する場合には、無限地盤に対するばね値の1/2になる(参考文献3)ことから、 $(\pi/2)G \sim \pi G$ に値になるものと考えられる。

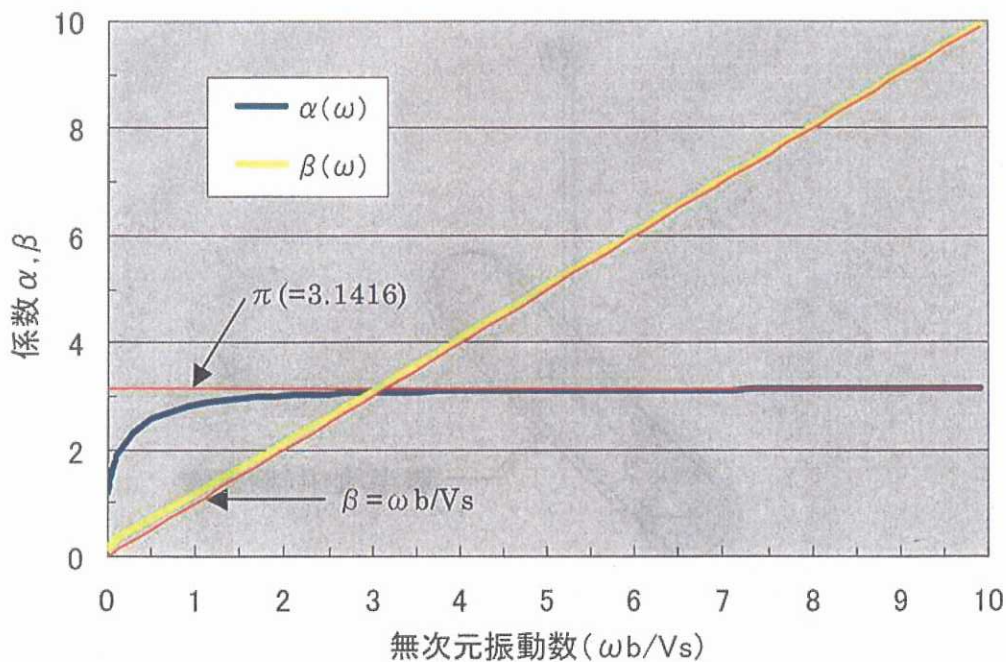


図 1-7 動的地盤バネ定数の係数値 α および β

1. 3 地盤ばね定数の理論解による検討 (その 2: 静的)

先の項目では、動的な効果を考慮して地盤ばね定数の検討を行った。以下では、静的な検討によって、地盤ばね定数を評価してみる。

いま、図 1-8 に示すように、線状地中構造物軸方向を z 座標の正方向（紙面直角方向手前）にとることとする。

また、外半径 b を有する円形断面の線状地中構造物を仮定し、構造物躯体を取り除いた地盤のみの状態を、構造物断面で見ると図 1-9 のようになる。図 1-9 において、紙面直角方向が、線状地中構造物軸方向になる。

軸方向のばねを求めるために、半径 b の位置において、地盤から構造物に力が作用することを考慮し、半径 b の位置で紙面直角方向に単位変位を与えたときの地盤から受ける反力を算定することを考える。

実際には、地表面が存在したり、硬い基盤が存在したりするであろうが、構造物がある程度深いところに設置され、周辺地盤がほぼ均質に近いことを想定している。また、トンネルが存在することによる影響範囲があることが予想されるので、半径 a の位置で変位がゼロになるものと仮定する。なお、この半径 a において、変位を固定するのは、静的な解析において、変位固定条件を付与しないと解が定まらない（不安定になる）こととも関係している。

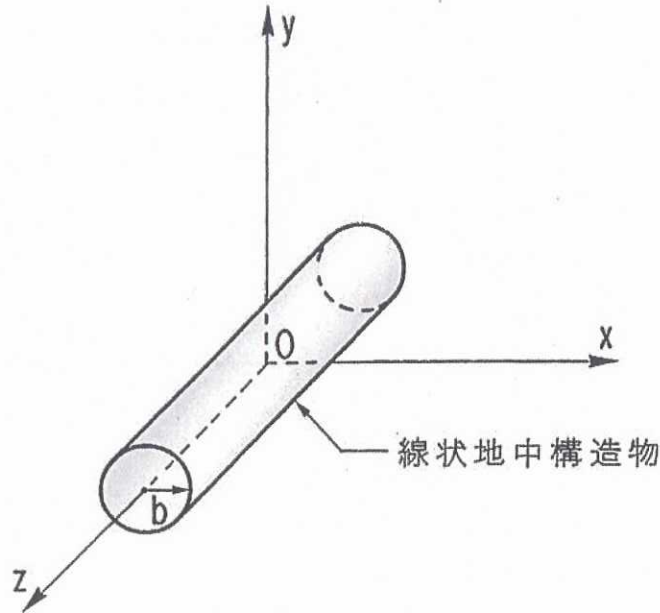


図 1-8 線状地中構造物と座標系

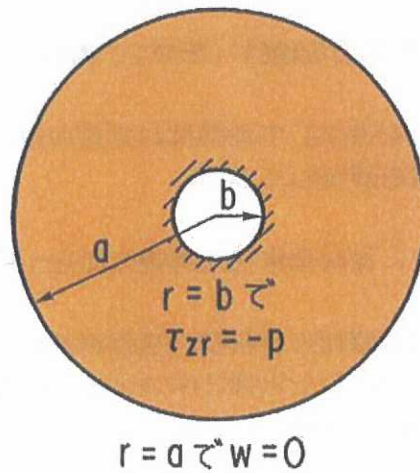


図 1-9 地中構造物断面の解析モデル

z 方向に関する弾性体の静的釣り合い式を考えると、先に示した動的釣り合い式(1-2)において、右辺の慣性力項(加速度項)をゼロとすればよいから、次式で表すことができる。

$$G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \frac{G}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (1-26)$$

ここに、 G : 地盤のせん断弾性係数、 u, v, w : x, y, z 方向の地盤変位、 ν : 地盤のポアソン比である。

いま、2次元状態であることから、 $\partial/\partial z = 0$ (z 方向に変位が一定) を考慮すれば、式(1-26)は、式(1-27)に簡単化される。

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (1-27)$$

式(1-27)を r - θ の極座標系で書き直せば、式(1-28)を得る。

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} = 0 \quad (1-28)$$

また、トンネル軸方向のせん断応力は、式(1-29)で表される。

$$\tau_{rz} = G \frac{\partial w}{\partial r} \quad (1-29)$$

図 1-9 の半径 b の位置で一様なせん断応力 p を作用させたときの解を求める。このとき、変位 w は、周方向 (θ 方向) に一定であることから、 $\partial/\partial\theta = 0$ を考慮すれば、式(1-28)は式(1-30)となる。

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = 0 \quad (1-30)$$

すなわち、図 1-9 に示すモデルで、トンネル外面に一様応力を作用させたときに、トンネル軸方向 (紙面直角方向) の地盤変位 w は、式(1-30)の 2 階常微分方程式に従うことになる。

以下では、トンネル外面 ($r=b$) における一様せん断応力と、 $r=a$ の位置における変位ゼロ ($w=0$) の境界条件のもとに、式(1-30)の方程式を解いてみよう。

まず、式(1-30)は、式(1-31)のように書き換えることができる。

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = 0 \quad (1-31)$$

式(1-31)から、 rdw/dr は r に依存しない一定値になることがわかる。すなわち、

$$r \frac{dw}{dr} = c_1 \quad (\text{一定値})$$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{c_1}{r}$$

したがって、上式を r で積分することにより、変位 w の一般解が、式(1-32)で求められる。

$$w = c_1 \ln r + c_2 \quad (1-32)$$

ここに、 c_1 および c_2 は、境界条件によって定まる積分定数であり、上記の $r=b$ と $r=a$ における 2 つの境界条件により定めることができる。

$r=b$ において、 $\tau_{rz} = -p$ より、式(1-33)を得る。

$$\tau_{rz} = G \frac{dw}{dr} = G \frac{c_1}{b} = -p \quad (1-33)$$

すなわち、

$$c_1 = -\frac{bp}{G} \quad (1-34)$$

$r=a$ において、 $w=0$ より、式(1-35)を得る。

$$c_1 \ln a + c_2 = 0 \quad (1-35)$$

すなわち、

$$c_2 = -c_1 \ln a = \frac{bp}{G} \ln a \quad (1-36)$$

式(1-32)、(1-34)および(1-36)より、変位 w が式(37)で得ることができる。

$$w = \frac{bp}{G} \ln \frac{a}{r} \quad (1-37)$$

式(1-37)により、図 1-9 の解析モデルにおいて、トンネル外面に一様せん断応力 p を作用させたときの地盤の変位 w を求められた。次に、線状地中構造物軸方向の地盤ばね定数 K_1 を求める。ここで、ばねとは単位変位に対する反力であること、また K_1 というのは、トンネル延長方向の単位長さ当たりのばね定数であることにも注意しておく。

図 1-10 に示すように、 z 方向（トンネル軸方向）の単位長さ当たりの軸方向地盤ばね定数を K_1 とすれば、トンネルに作用する力が $2\pi b \times 1 \times p$ となることから、次式を得る。

$$K_1 = \frac{2\pi b \cdot 1 \cdot p}{(w)_{r=b}} \quad (1-38)$$

ここに、 $(w)_{r=b}$: 式(1-37)で $r=b$ における変位 である。

式(1-37)および(1-38)より、次式を得る。

$$K_1 = \alpha G$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{\ln(a/b)} \quad (1-39)$$

式(1-39)が、地盤ばね定数 K_1 を、解析的に求めた場合の算定式である。式(1-39)によれば、地盤ばね定数が、地盤のせん断弾性係数に比例することが示されている。また、係数 α は共同溝設計指針の C_1 に相当するものであるが、ここではトンネル外半径 b に対する変位固定半径 a の比に依存することがわかる。すなわち、 α あるいは共同溝指針の C_1 はトンネル形状や境界条件に依存する係数であると考えられる。また、地盤ばね定数が、 α と G の積で示されることは、地盤の幾何学的な条件（形状効果や境界条件）と地盤の力学物性が分離できることを示しているといえる。

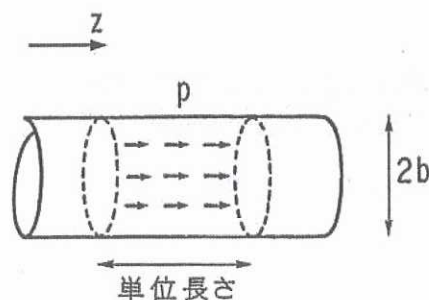


図 1-10 トンネル単位長さ当たりのばね

次に、式(1-39)を用いて、 a/b と α の関係を図示したものが、図 1-11 である。図によれば、 a/b の値によって α の値が異なり、地盤ばね定数が異なることがわかる。実際の地盤では、トンネルの影響が及ばない地点が存在すると考えられるので、これが α の変化が小さくなる a/b は 10 あたりであると仮定し、 $a/b=10$ の α を用いると、2.73 となる。この値は、先の動的な検討において、振動数が大きいところにおける地盤ばね定数の係数値 π ($=3.14$) とほぼ等しくなっている。

ただし、この 2.73 という値は、共同溝設計指針の 1.0 よりも大きくなっている。この理由としては、本解析モデルでは円形断面を仮定したことや、設置深度が大きいところを想定したことなど、実際の共同溝と幾何学的条件が異なることが考えられる。

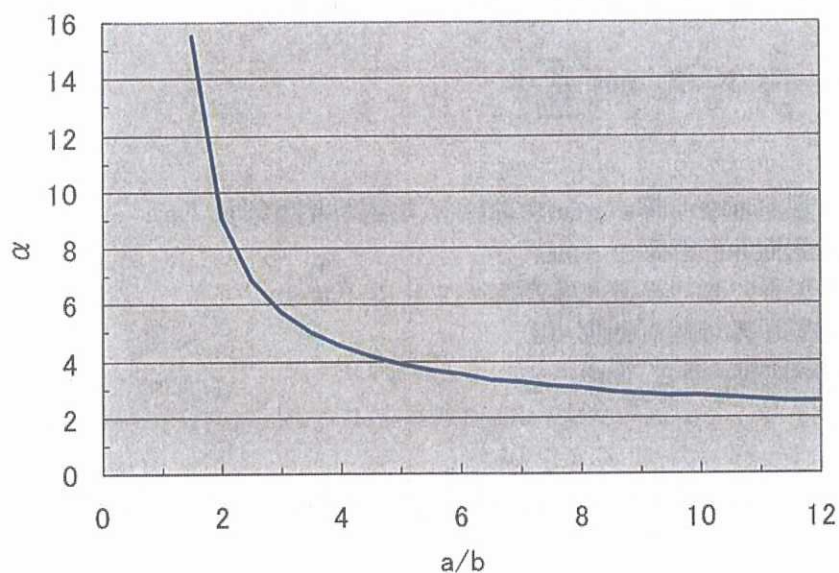


図 1-11 α と a/b の関係

2. 水平地盤の地震時変位に関して

2. 1 耐震設計指針類における地震時地盤変位

現状の耐震設計指針類に定められる地盤変位振幅については、図 2-1 に示すように、表層地盤の地盤変形モードに基づく地中変位が設定される。

図 2-1 に示される地震時水平地盤変位 $u_h(z)$ は、駐車場設計・施工指針同解説（社団法人日本道路協会 平成 4 年 11 月）によれば、以下の式により算定される。

「駐車場設計・施工指針同解説 p160～161」より引用

$$u_h(z) = \frac{2}{\pi^2} \cdot S_V \cdot T_S \cdot \cos\left(\frac{\pi z}{2H}\right) \quad (2-1)$$

ここに、

$u_h(z)$: 地表面から深さ z (m)における地震時地盤変位 (m)

z : 地表面からの深さ (m)

S_V : 基盤面における速度応答スペクトル (m/s)

T_S : 表層地盤の固有周期 (s)

H : 表層地盤の厚さ (m)

なお、式(2-1)における z は、地表面からの深さとしているので、図 2-1 における z の定義とは異なることに注意されたい。

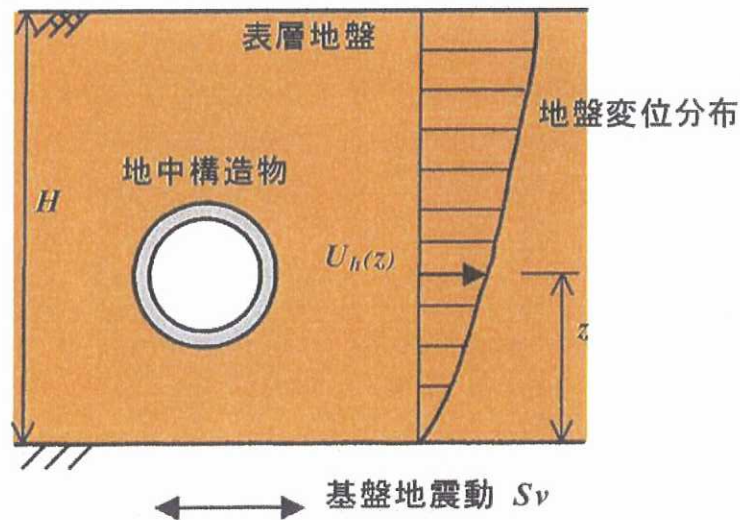


図 2-1 地震時地盤変位の設定

式(2-1)によれば、地震時地盤変位は、表層地盤の固有周期、構造物の設置深さ、表層地盤厚、および基盤面における速度応答スペクトルによって表されることがわかる。なお、応答スペクトルについては、参考資料4を参照されたい。

以下では、地震時地盤変位の算定式が、なぜ式(2-1)のような形で表されるのかを、地盤震動の基本から考えてみる。そうすることで、地震動パラメータが基盤面の速度応答スペクトルになることや係数 $(2/\pi^2)$ の意味などが明らかになると思われる。

本質的には、地盤震動解析プログラム「SHAKE」で実施されるような地盤応答計算と同じであって、実務的な設計を意識して計算式を簡素化しているが、地盤変位応答の時刻歴最大値を求めていることが示される。

2. 2 地震時地盤変位の算定式の理論的な誘導

対象とする地盤として、図2-1に示すように、剛な基盤上に均質な物性を有する一層系弾性地盤を仮定する。ただし、表層は内部減衰を有するものとする。基盤上での水平地振動によって表層地盤がせん断振動するとき、地盤中の微小要素に関する力の釣り合いを考える。図2-1の高さ dz の微小要素に作用する力は式(2-2)で表される。

$$\text{慣性力: } \frac{\gamma}{g} \left\{ \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} + \ddot{u}_g(t) \right\} dz \quad (2-2a)$$

$$\text{要素下面のせん断応力: } \tau = G \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t \partial z} \quad (2-2b)$$

$$\text{要素上面のせん断応力: } \tau + d\tau = G \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t \partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ G \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t \partial z} \right\} dz \quad (2-2c)$$

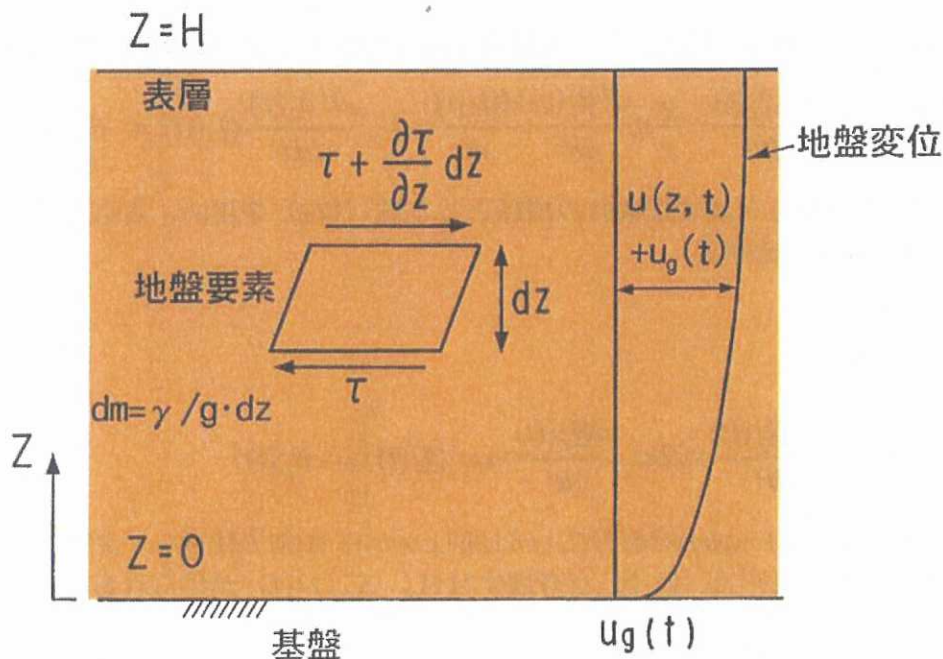


図2-1 地震時地盤変位算定の解析モデル

ここに、 γ ：表層地盤の単位体積重量、 G ：表層地盤のせん断弾性係数、 η ：表層地盤の減衰係数、 $u(z,t)$ ：基盤から z の位置での時刻 t における相対水平変位、 $u_g(t)$ ：時刻 t における基盤の変位である。

式 (2-2a) ~ (2-2c) で示される力の釣り合いから表層地盤の相対変位 $u(z,t)$ に関する支配方程式 (2-3) が得られる。

$$\frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} - \eta \frac{\partial^3 u(z,t)}{\partial t \partial z^2} - G \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = -\frac{\gamma}{g} \ddot{u}_g(t) \quad (2-3)$$

ここに、 $u_g(t)$ ：基盤の加速度である。

式 (2-3) をモード合成法を用いることにより解く。相対変位 $u(z,t)$ を式 (2-4) のように置く。

$$u(z,t) = \sum_i \phi_j(z) \cdot Q_j(t) \quad (2-4)$$

ここに、 $\phi_j(z)$ ：地盤の j 次のせん断変形モード、 $Q_j(t)$ ：モードに依存する時間関数である。なお、 $\phi_j(z)$ は式 (2-3) において、 $\eta=0$ で右辺がゼロのときの解（自由振動解）であり、式 (2-5) を満足し、式 (2-6) で表される（参考資料 2-2 参照）。

$$\frac{d^2 \phi_j(z)}{dz^2} + \frac{\omega_j^2}{V_s^2} \phi_j(z) = 0 \quad , \quad \omega_j = (2j-1) \frac{\pi V_s}{2H} \quad (j=1,2,\dots) \quad (2-5)$$

$$\phi_j(z) = \sin \left\{ \frac{(2j-1)\pi z}{2H} \right\} \quad (j=1,2,\dots) \quad (2-6)$$

ここに、 ω_j ：表層地盤の j 次の固有円振動数、 V_s ：表層地盤のせん断波速度、 H ：表層地盤の層厚である。

式 (2-4) を式 (2-3) に代入し、両辺を γ/g で割れば、式 (2-7) が得られる

$$\sum_j \left[\phi_j(z) \frac{d^2 Q_j(t)}{dt^2} - \frac{g}{\gamma} \eta \frac{d^2 \phi_j(z)}{dz^2} \frac{dQ_j(t)}{dt} - V_s^2 \frac{d^2 \phi_j(z)}{dz^2} Q_j(t) \right] = -\ddot{u}_g(t) \quad (2-7)$$

ここで、減衰係数 η と減衰定数 h の関係として式 (2-8) を使い、さらに式 (2-5) を考慮すれば、式 (2-9) を得る。

$$\eta = \frac{2hG}{\omega_j} \quad (2-8)$$

$$\sum_j \phi_j(z) \left[\frac{d^2 Q_j(t)}{dt^2} + 2h\omega_j \frac{dQ_j(t)}{dt} + \omega_j^2 Q_j(t) \right] = -\ddot{u}_g(t) \quad (2-9)$$

式 (2-9) の両辺に $\phi_i(z)$ を掛けて、 z に関し 0 から H まで積分し、さらに式 (2-6) よりモードの直交性を表す式 (2-10) を考慮すれば、式 (2-11) が得られる。

$$\int_0^H \phi_i(z) \cdot \phi_j(z) dz = 0 \quad (i \neq j) \quad (2-10)$$

$$\frac{d^2 Q_i(t)}{dt^2} + 2h\omega_i \frac{dQ_i(t)}{dt} + \omega_i^2 Q_i(t) = -\mu_i \ddot{u}_g(t) \quad (2-11a)$$

$$\mu_i = \frac{\int_0^H \phi_i(z) dz}{\int_0^H \{\phi_i(z)\}^2 dz} \quad (2-11b)$$

ここに、 μ_i : i 次の刺激係数である。

地盤の相対変位 $u(z,t)$ の時刻歴最大値は、式 (2-4) を用いて式 (2-12) で表される。

$$\text{Max}_t \{u(z,t)\} = \text{Max}_t \sum_i \phi_i(z) \cdot Q_i(t) \quad (2-12)$$

ここで、自乗和平均法 (SRSS 法 : Square Root of Sum of Squares) を用いて評価すれば、式 (2-13) を得る。

$$\text{Max}_t \{u(z,t)\} \cong \sqrt{\sum_i [\phi_i(z) \cdot \text{Max}_t \{Q_i(t)\}]^2} \quad (2-13)$$

式 (2-13) における $Q_i(t)$ は、固有振動数、減衰定数 h を有する一自由度系に、入力加速度 $\mu_i \ddot{u}_g(t)$ が作用するときの相対応答変位を表している。したがって、式 (2-14) が成立する。

$$\text{Max}_t \{Q_i(t)\} = \mu_i \cdot S_D(\omega_i, h) \quad (2-14)$$

ここに、 $S_D(\omega_i, h)$: 固有振動数 ω_i 、減衰定数 h に対する基盤地震動 $\ddot{u}_g(t)$ の変位応答スペクトルである (参考資料 2-1 参照)。

さらに、変位応答スペクトルと速度応答スペクトルの近似的な関係として、式 (2-15) が成立する。

$$S_D(\omega_i, h) \cong \frac{T_i}{2\pi} S_V(\omega_i, h) \quad (2-15)$$

式 (2-13) ~ (2-15) より式 (2-16) が得られる。

$$\text{Max}_t \{u(z,t)\} \cong \sqrt{\sum_i \left[\mu_i \phi_i(z) \cdot \frac{T_i}{2\pi} \cdot S_V(\omega_i, h) \right]^2} \quad (2-16)$$

一方、式 (2-17) が成立するから、式 (2-11b) より式 (2-18) を得る

$$\int_0^H \phi_i(z) dz = \frac{2H}{(2i-1)\pi} \quad (2-17a)$$

$$\int_0^H \{\phi_i(z)\}^2 dz = \frac{H}{2} \quad (2-17b)$$

$$\mu_i = \frac{4}{(2i-1)\pi} \quad (2-18)$$

式 (2-6) 及び (2-18) を用い

$$T_i = \frac{T_1}{2i-1} \quad (T_1: \text{地盤の一次固有周期}) \quad (2-19)$$

を考慮すれば、地盤の相対変位の時刻歴最大値が、式(2-20)で表すことができる。

$$\text{Max}_i \{u(z,t)\} \cong \sqrt{\sum_i \left\{ \frac{2}{\pi^2} \frac{T_1}{(2i-1)^2} \sin \frac{(2i-1)\pi z}{2H} S_v(T_i, h) \right\}^2} \quad (2-20)$$

式(2-20)は、地盤の高次変形モードを考慮した地盤変位の算定式になっている。ここで、地盤の一次変形モードのみに着目すれば、式(2-21)が得られる。

$$\text{Max}_i \{u(z,t)\} \cong \frac{2}{\pi^2} \cdot T_1 \cdot S_v(T_1, h) \cdot \sin \frac{\pi z}{2H} \quad (2-21)$$

式(2-21)は、先に示した地盤変位振幅に関する設計式(2-1)に一致していることがわかる(zの取り方が異なるので、cosとsinの違いがある)。

なお、以上の導入過程から、地震時地盤変位の算定式(2-21)には、以下に示すモデル化の仮定や前提条件が存在することになる。

- (1) 地盤は、均質な物性を有する成層一層系地盤である。
- (2) 地盤は、水平地震動によってせん断震動している。
- (3) 地盤の一次変形モードのみに着目している。
- (4) 地盤の減衰はモードごとの固有振動数に依存しない(高次モードの影響を考慮するときに関係する)。
- (5) 変位応答スペクトルに固有振動数を乗じて速度応答スペクトルを求める近似式を用いている。

地震時地盤変位の算定式(2-21)の構成を見直すと、以下のように書くことができる。

$$u_h(z) = \frac{4}{\pi} \times \frac{T_1}{2\pi} S_v(T_1, h) \times \sin \frac{\pi z}{2H} \quad (2-22)$$

↑ 1次の刺激係数

↑ 変位応答スペクトルの近似式

↑ 1次の変位モード

地表面最大変位

式(2-22)をみるとわかるように、地震時地盤変位の推定式というのは、地盤変形の1次モード(変形の節が無い地盤変形状態)を仮定し、基盤地震動に対する変位応答スペクトルの近似式に刺激係数を乗じ、さらに地盤の1次変位モードを乗じたものである。

すなわち、1自由度系の変位応答の最大値をもとに、地盤が広がりを持った存在(多自由度系)であることから、それを刺激係数によって補正(1自由度系に比べ1.27倍になる)して地表面最大変位を求め、さらに深度方向の変位の変化を1次変位モードにより考慮しているということになる。

2. 3 水平多層地盤への拡張

前項では、耐震設計指針類に定められる地震時地盤変位の算定式の誘導を行ったが、先述のように、均質な1層系地盤を仮定している。

本項では、同様の議論を水平多層地盤に拡張した場合について説明する。

(1) 固有振動数と固有モード

図 2-2 の水平多層地盤における第 $i-1$ 層と i 層の変位モードは、式(2-23)で表される。

$$U_{i-1}(z_{i-1}) = A_{i-1} \cos \frac{\omega z_{i-1}}{V_{S_{i-1}}} + B_{i-1} \sin \frac{\omega z_{i-1}}{V_{S_{i-1}}} \quad (2-23a)$$

$$U_i(z_i) = A_i \cos \frac{\omega z_i}{V_{S_i}} + B_i \sin \frac{\omega z_i}{V_{S_i}} \quad (2-23b)$$

ここに、 ω ：円振動数、 V_{S_i} ：第 i 層のせん断波速度 である。

また、境界条件として、第 $i-1$ 層下面と第 i 層上面での変位および応力の連続条件と、最下層上面での変位および最上層上面での応力の条件から、式(2-24)および(2-25)が得られる。

$$U_{i-1}(z_{i-1} = 0) = U_i(z_i = H_i) \quad (2-24a)$$

$$\left[G_{i-1} \frac{dU_{i-1}}{dz_{i-1}} \right]_{z_{i-1}=0} = \left[G_i \frac{dU_i}{dz_i} \right]_{z_i=H_i} \quad (2-24b)$$

$$U_n(z_n = 0) = 0 \quad (2-25a)$$

$$\left[G_1 \frac{dU_1}{dz_1} \right]_{z_1=H_1} = 0 \quad (2-25b)$$

ここに、 G_i ：第 i 層のせん断弾性係数、 H_i ：第 i 層の層厚 である。

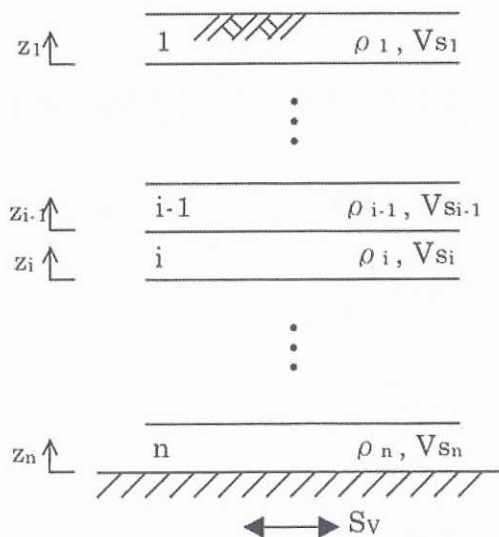


図 2-2 水平多層地盤の解析モデル

式(2-23)および(2-24)より、

$$\begin{Bmatrix} A_{i-1} \\ B_{i-1} \end{Bmatrix} = [L_i] \begin{Bmatrix} A_i \\ B_i \end{Bmatrix} \quad (2-26a)$$

$$[L_i] = \begin{bmatrix} \cos \frac{\omega H_i}{V_{S_i}} & \sin \frac{\omega H_i}{V_{S_i}} \\ -\alpha_i \sin \frac{\omega H_i}{V_{S_i}} & \alpha_i \cos \frac{\omega H_i}{V_{S_i}} \end{bmatrix} \quad (2-26b)$$

$$\alpha_i = \frac{\rho_i V_{S_i}}{\rho_{i-1} V_{S_{i-1}}} \quad (2-26c)$$

ここに、 ρ_i ：第*i*層の密度 である。

式(2-25a)の条件より、 $A_n = 0$ が得られる。また、 $B_n = 1$ を仮定し、式(26a)によって B_0 を定義すれば、次式を得る。

$$\begin{Bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{Bmatrix} = [L_1][L_2] \cdots [L_n] \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = [L] \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2-27a)$$

$$[L] = [L_1][L_2] \cdots [L_n] \quad (2-27b)$$

$$\alpha_1 = 1 \quad (2-27c)$$

式(2-25b)は、 $B_0 = 0$ と同一の式を意味するので、式(2-27)から、地盤の固有振動数を定める固有方程式が、式(2-28)で与えられる。

$$L_{22} = 0 \quad (2-28)$$

ここに、 L_{22} ：式(2-27b)で示されるマトリックス $[L]$ の(2,2)要素 である。

また、*k*次モードに対する第*i*層の固有モードは、式(2-29)で表される。

$$U_i^k(z_i) = A_i \cos \frac{\omega_k z_i}{V_{S_i}} + B_i \sin \frac{\omega_k z_i}{V_{S_i}} \quad (2-29a)$$

$$\begin{Bmatrix} A_i \\ B_i \end{Bmatrix} = [L_{i+1}][L_{i+2}] \cdots [L_n] \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2-29b)$$

(2) 刺激係数とモード減衰定数

*k*次モードの刺激係数 μ_k は、式(2-30)で表すことができる。

$$\mu_k = \frac{\sum_{i=1}^n \int_0^{H_i} \rho_i \{U_i^k(z_i)\} dz_i}{\sum_{i=1}^n \int_0^{H_i} \rho_i \{U_i^k(z_i)\}^2 dz_i} \quad (2-30)$$

式(2-30)に、式(2-29a)の変位モードを代入して計算を実行すると、刺激係数の表示式として、式(2-31)が得られる。

$$\mu_k = \frac{Q}{P} \quad (2-31a)$$

$$Q = \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i V_{S_i}}{\omega_k} \left\{ A_i \sin \frac{\omega_k H_i}{V_{S_i}} + B_i \left(1 - \cos \frac{\omega_k H_i}{V_{S_i}} \right) \right\} \quad (2-31b)$$

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i}{2} \left[H_i (A_i^2 + B_i^2) + \frac{V_{S_i}}{\omega_k} \sin \frac{\omega_k H_i}{V_{S_i}} \left\{ (A_i^2 - B_i^2) \cos \frac{\omega_k H_i}{V_{S_i}} + 2A_i B_i \sin \frac{\omega_k H_i}{V_{S_i}} \right\} \right] \quad (2-31c)$$

モード減衰定数に関しては、各層の内部減衰を各次モードのひずみエネルギーの大きさに応じて振り分けを行う、ひずみエネルギー比例型減衰を考慮すれば、k 次のモード減衰定数 h_k が式(2-33)で表される。このひずみエネルギー比例型減衰を仮定するのは、前項で述べた式(2-8)と同様な関係、第 i 層の減衰係数 η_i と第 i 層の内部減衰定数 β_i との間に、

$$\eta_i = \frac{2\beta_i G_i}{\omega_k} \quad (2-32)$$

を仮定し、多自由度系の減衰マトリクスの非対角成分を無視することに相当している。

$$h_k = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i E_i}{\sum_{i=1}^n E_i} \quad (2-33a)$$

$$E_i = \int_0^{H_i} \frac{1}{2} G_i \gamma_i^2 dz_i \quad (2-33b)$$

ここに、 β_i : 第 i 層の内部減衰定数、 E_i : 第 i 層の単位水平幅、単位奥行き当りのひずみエネルギー、 γ_i : 第 i 層のせん断ひずみ ($= dU_i^k / dz_i$) である。

式(2-33)に、式(2-29a)の変位モードを代入して計算を実行すれば、モード減衰定数の表示式として、式(2-34)が得られる。

$$h_k = \frac{S}{R} \quad (2-34a)$$

$$S = \sum_{i=1}^n \beta_i \rho_i \left[H_i (A_i^2 + B_i^2) + \frac{V_{S_i}}{\omega_k} \sin \frac{\omega_k H_i}{V_{S_i}} \left\{ (B_i^2 - A_i^2) \cos \frac{\omega_k H_i}{V_{S_i}} - 2A_i B_i \sin \frac{\omega_k H_i}{V_{S_i}} \right\} \right] \quad (2-34b)$$

$$R = \sum_{i=1}^n \rho_i \left[H_i (A_i^2 + B_i^2) + \frac{V_{S_i}}{\omega_k} \sin \frac{\omega_k H_i}{V_{S_i}} \left\{ (B_i^2 - A_i^2) \cos \frac{\omega_k H_i}{V_{S_i}} - 2A_i B_i \sin \frac{\omega_k H_i}{V_{S_i}} \right\} \right] \quad (2-34c)$$

(3) 地盤の応答変位

k 次モードに対する第 i 層の変位の時刻歴最大値は、式(2-35)で表すことができる。

$$\text{Max}_t \{ u_i^k(z, t) \} = \frac{\mu_k}{2\pi} \cdot T_k \cdot S_V(T_k, h_k) \cdot U_i^k(z_i) \quad (2-35)$$

ここに、 T_k : k 次モードの地盤の固有周期 ($=2\pi/\omega_k$)、 $S_V(T_k, h_k)$: 固有周期 T_k 、減衰定数 h_k に対する基盤地震動の速度応答スペクトル、 μ_k : 式(2-31)で表される k 次の刺激係数、 $U_i^k(z_i)$: 式(2-29)で表される k 次モードの第 i 層の変位モードである。

式(2-35)における固有周期、モード形、刺激係数およびモード減衰定数の計算手順を、図 2-3 に示す。

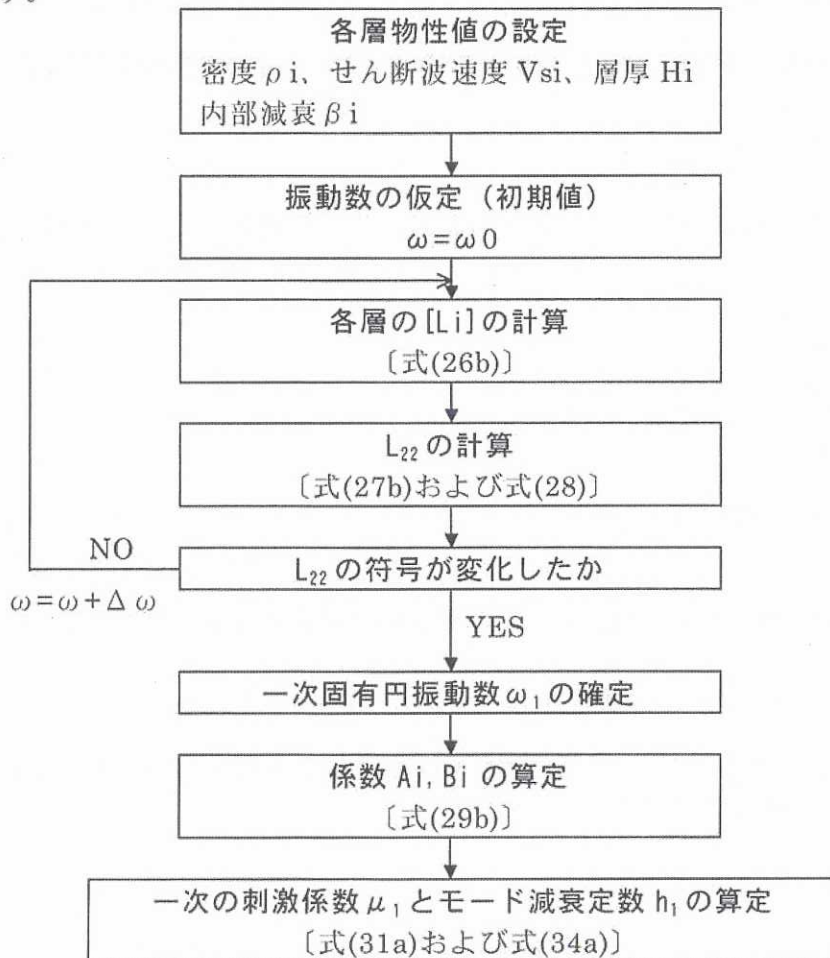


図 2-3 固有周期、モード形、刺激係数およびモード減衰定数の計算

以下では、図 2-3 に従い、多層地盤の固有周期、モード形、刺激係数およびモード減衰定数を算定した例を示す。

多層地盤の条件としては、層厚を 5m の 3 層地盤（中間に軟弱層を含む）を考慮し、各層のせん断波速度および内部減衰定数をそれぞれ 200、100、250m/sec および 0.05、0.10、0.05 とした。また、単位体積重量は全て 2.2tf/m^3 とした。

図 2-4 に、1 次の変位モード図を示す。また、1 次の固有周期は 0.410sec、1 次のモード減衰定数は 0.089 であった。

図によれば、中間層の軟らかい層において変形が大きくなっていること、1 次のモード減衰定数が中間層の変形の影響を受けていることがわかる。

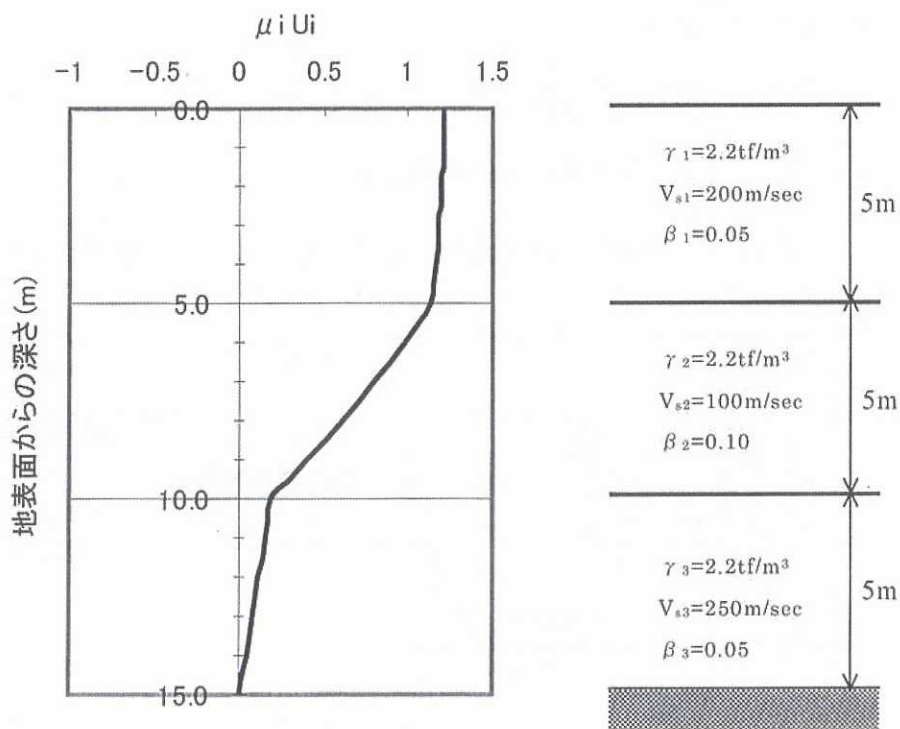


図 2-4 3 層地盤での変位モード図

3. 地中ボックスカルバートの地震時応答に関して

一般に、地下構造物の耐震診断を行う場合には、構造物が地盤内に設置されるため、地盤と構造物の相互作用を考慮して地震時応答を推定する必要がある。そのためには、構造物と地盤の双方をモデル化した応答変位法や動的FEM解析などが適用されることが多い。

しかしながら、縦断方向に長い線状地下構造物の場合、構造物長手方向に地盤構造が変化することがあり、断面ごとに地震時応答の推定を行うと、その手間と費用が増大することになる。したがって、危険箇所のスクリーニングを迅速に行いたい場合には、地盤連成解析を用いずとも精度良い地震応答計算が可能な方法が望ましいと考えられる。

以下では、応答変位法に基づき、地中ボックスカルバートの地震時応答変形量を簡易的に算定するための方法について述べる。なお、地下構造物の横断面方向の検討を対象とする。

3. 1 地震時変形量の算定式の誘導

図3-1の左に示すように、均質な表層地盤内に埋設されたボックスカルバートを考える。このとき、表層地盤が一次変形モードで震動することを仮定し、地下構造物の層間変位 δ_s の算定式を誘導する。

図3-1の右に示すように、応答変位法を参照し、構造物を1質点とばねでモデル化し、周辺地盤からの影響として、遠方地盤（自由地盤）と構造物変位の差 $(\delta_g - \delta_s)$ に基づく作用を地盤ばね (K_g) で考慮し、上載土から作用する周面せん断力 (P_s) を考慮する。また、地盤加速度による構造物に作用する慣性力も考慮する。

(1) 荷重の算定

表層地盤変位 $u(z)$ は、

$$u(z) = \mu_1 S_D(T_1) \sin \frac{\pi z}{2H} \quad (3-1)$$

ここに、 μ_1 ：せん断1次モードの刺激係数 ($=4/\pi$)

$S_D(T_1)$ ：基盤地震動の変位応答スペクトル (T_1 ：地盤の1次固有周期)

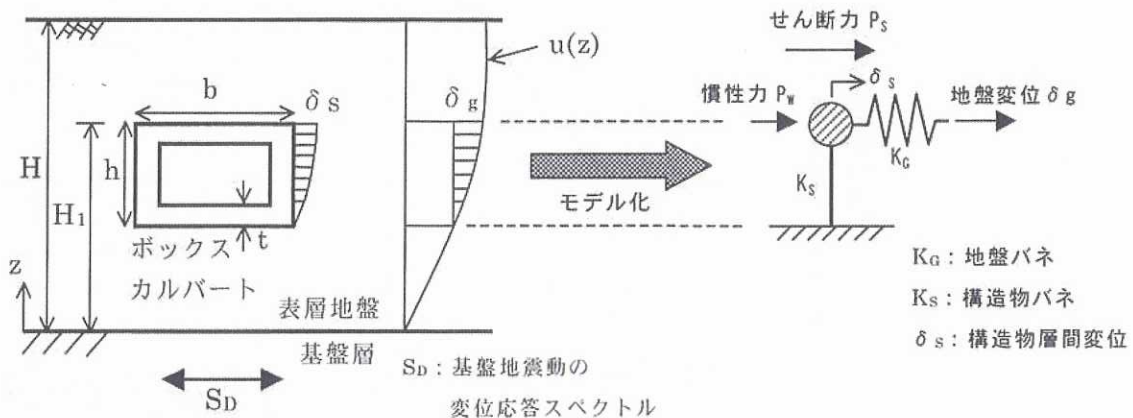


図3-1 地震時応答変形算定式の解析モデル
(参考文献 8)より引用)

せん断ひずみ $\gamma(z)$ を求めると、

$$\gamma(z) = \frac{d}{dz} u(z) = \frac{\pi}{2H} \mu_1 S_D(T_1) \cos \frac{\pi z}{2H} \quad (3-2)$$

したがって、せん断応力 $\tau(z)$ は、

$$\tau(z) = G_g \gamma(z) = \frac{\pi G_g}{2H} \mu_1 S_D(T_1) \cos \frac{\pi z}{2H} \quad (3-3)$$

地下構造物上面 $z=H_1$ における地盤のせん断力 P_s (単位奥行き幅あたり) は、

$$P_s = \tau(H_1) b = \frac{\pi G_g b}{2H} \frac{4}{\pi} S_D(T_1) \cos \frac{\pi H_1}{2H} = \frac{2b}{H} G_g S_D(T_1) \cos \frac{\pi H_1}{2H} \quad (3-4)$$

以上より、式(3-4)が、地下構造物上面に作用する周面せん断力の算定式となる。

次に、構造物に作用する慣性力を算定する。

表層地盤内の加速度分布 $a(z)$ として、次式(3-5)を仮定する (参考資料 3-1 参照)。(地下構造物に及ぼす慣性力の影響は、地盤ばねによって受ける力や周面せん断力による影響に比べて小さいので、不適当な仮定ではないと考えられる)

$$a(z) = \mu_1 S_A(T_1) \sin \frac{\pi z}{2H} \quad (3-5)$$

ここに、 $S_A(T_1)$: 基盤地震動の加速度応答スペクトル

地下構造物中心位置 $z=H_1 - h/2$ における加速度を求めると、

$$\begin{aligned} a\left(H_1 - \frac{h}{2}\right) &= \frac{4}{\pi} S_A(T_1) \sin \frac{\pi(H_1 - \frac{h}{2})}{2H} \\ &= \frac{4}{\pi} \omega_1^2 S_D(T_1) \sin \frac{\pi(H_1 - \frac{h}{2})}{2H} \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 S_D(T_1) \sin \frac{\pi(H_1 - \frac{h}{2})}{2H} \\ &= \frac{16\pi}{T_1^2} S_D(T_1) \sin \frac{\pi(H_1 - \frac{h}{2})}{2H} \end{aligned} \quad (3-6)$$

地下構造物の重量は、

$$W = \gamma_s \{bh - (b-2t)(h-2t)\} = 2\gamma_s t(b+h-2t) \quad (3-7)$$

ここに、 γ_s : 構造物の単位体積重量

式(3-6)および式(3-7)より、地下構造物に作用する慣性力 P_w は、

$$P_w = \frac{W}{g} a\left(H_1 - \frac{h}{2}\right) = \frac{2\gamma_s t}{g} (b+h-2t) \frac{16\pi}{T_1^2} S_D(T_1) \sin \frac{\pi(H_1 - \frac{h}{2})}{2H} \quad (3-8)$$

(2) ばね定数の設定

構造物のばね K_s は、構造物が均一な（等価な）せん断剛性 G_s を有する矩形の構造体に働くせん断力と変形の関係から求める。

せん断応力-せん断ひずみの関係から、

$$\tau = G_s \gamma \tag{3-9}$$

すなわち、

$$\tau b = G_s \frac{\delta}{h} b \tag{3-10}$$

$$P = G_s \frac{b}{h} \delta \tag{3-11}$$

したがって、単位奥行き幅あたりの構造物のばね K_s は、

$$K_s = \frac{P}{\delta} = \frac{b}{h} G_s \tag{3-12}$$

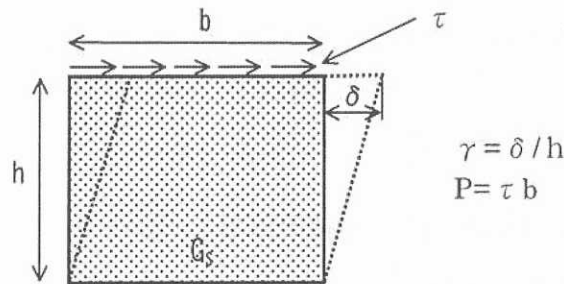


図 3-2 構造物のばね K_s

次に、地盤ばね K_G を考慮する。地盤ばねは、地盤から構造物に作用する力を 1 本のばねでモデル化しており、地盤せん断剛性 G_g に比例するものとして、次式を仮定した。

$$K_G = \lambda G_g \tag{3-13}$$

ここに、 λ ：構造物の形状、構造物設置位置および変形モードに依存する定数

上記の λ は、地下構造物全体がせん断変形するモードにおいて、構造物周辺に働く水平方向の合力を、構造物の変形量 δ_s と自由地盤の構造物位置における変形量 δ_g の差 ($\delta_s - \delta_g$) で除して求めることができる。ここでは、土被り ($H-H_1$)、縦横比 (b/h) および上層地盤に対する下層地盤のせん断波速度比 (V_{S2}/V_{S1}) をパラメータとし、静的 FEM によって λ の値を評価した結果を示す。

図 3-3 に解析モデルを示す。また、図 3-4 に評価結果を示す。図によれば、 λ は、土被りや上・下層地盤のせん断波速度比によって変化し、1~6 程度の値をとることがわかる。

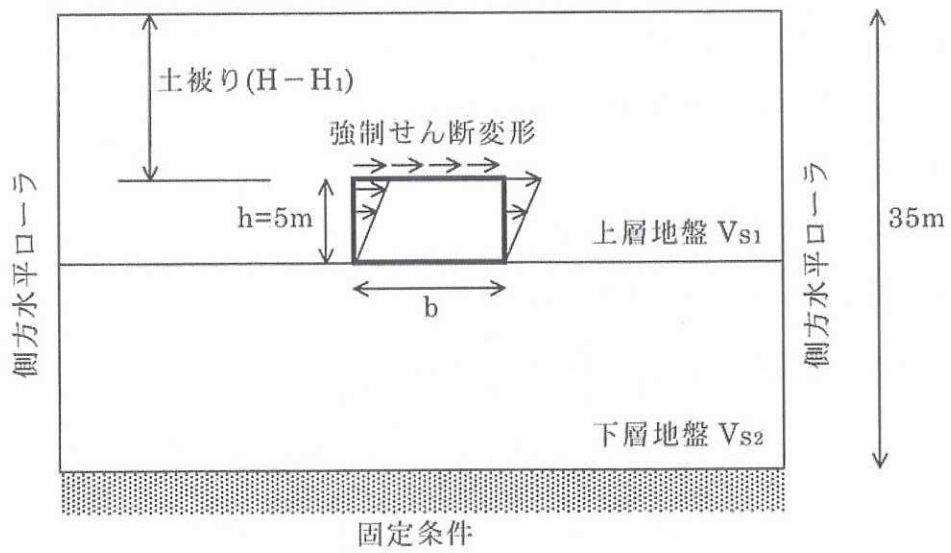


図 3-3 λ の評価のための静的 FEM モデル

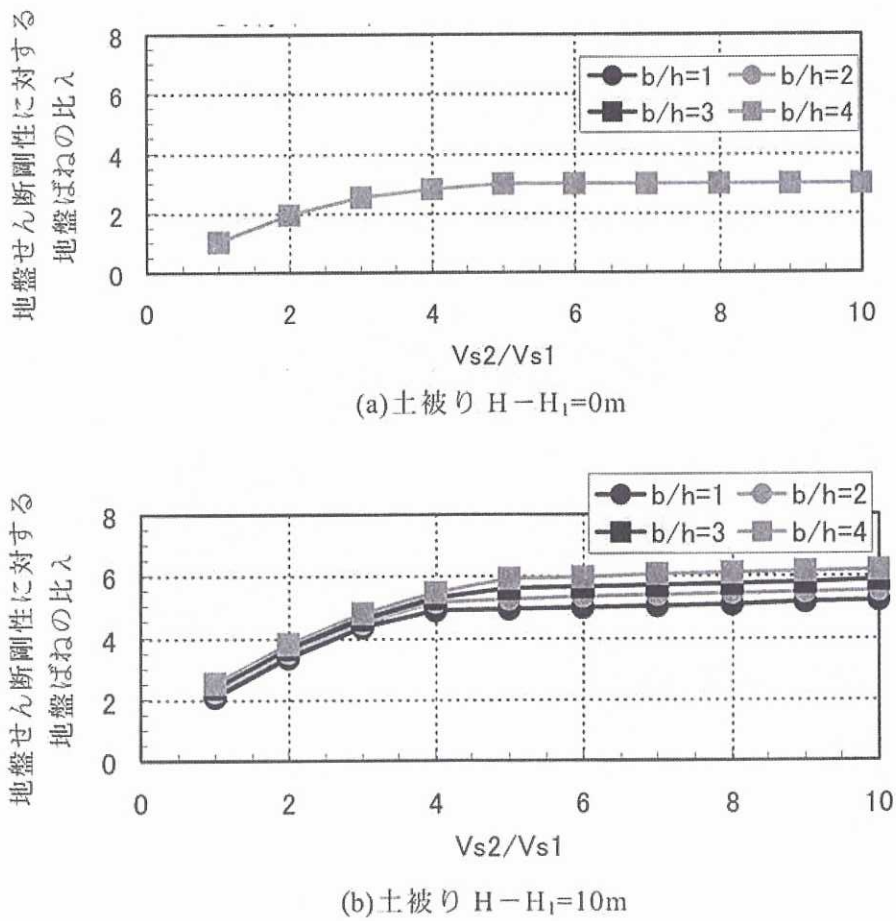


図 3-4 λ の評価 (参考文献 8)より引用

(3) 地震時変形量

図 3-1 に示した解析モデルにおいて、地盤ばねの力、周面せん断力 P_S および慣性力 P_W の釣り合いから、次式が成立する。

$$P_S + P_W - K_S \delta_S + K_G (\delta_g - \delta_S) = 0 \quad (3-14)$$

すなわち、

$$(K_S + K_G) \delta_S = P_S + P_W + K_G \delta_g \quad (3-15)$$

式(3-15)に、式(3-4)および式(3-8)を代入すれば、

$$(K_S + K_G) \delta_S = K_G \delta_g + \frac{2b}{H} G_g S_D(T_1) \cos \frac{\pi H_1}{2H} + \frac{2\gamma_s t}{g} (b+h-2t) \frac{16\pi}{T_1^2} S_D(T_1) \sin \frac{\pi(H_1 - \frac{h}{2})}{2H} \quad (3-16)$$

ここで、式(3-1)より、地盤変形量 δ_g は、

$$\delta_g = \frac{4}{\pi} S_D(T_1) \left\{ \sin \frac{\pi H_1}{2H} - \sin \frac{\pi(H_1 - h)}{2H} \right\} \quad (3-17)$$

したがって、

$$S_D(T_1) = \frac{\pi}{4} \delta_g \frac{1}{\sin \frac{\pi H_1}{2H} - \sin \frac{\pi(H_1 - h)}{2H}} \quad (3-18)$$

式(3-16)と式(3-18)を用い、 $S_D(T_1)$ を消去し、 δ_S / δ_g を求めると、

$$\frac{\delta_S}{\delta_g} = \frac{1}{K_S + K_G} \left[\begin{aligned} & K_G + \frac{\pi b}{2H} G_g \frac{\cos \frac{\pi H_1}{2H}}{\sin \frac{\pi H_1}{2H} - \sin \frac{\pi(H_1 - h)}{2H}} \\ & + \frac{8\pi^2}{T_1^2} \frac{\gamma_s t}{g} (b+h-2t) \frac{\sin \frac{\pi(H_1 - \frac{h}{2})}{2H}}{\sin \frac{\pi H_1}{2H} - \sin \frac{\pi(H_1 - h)}{2H}} \end{aligned} \right] \quad (3-19)$$

ここで、式(3-12)および式(3-13)より、

$$\begin{aligned} K_S &= \frac{b}{h} G_s \\ K_G &= \lambda G_g \end{aligned} \quad (3-20)$$

また、

$$T_1 = \frac{4H}{V_s} \quad (3-21)$$

を用いれば、

$$T_1^2 = \frac{16H^2}{V_s^2} = \frac{16H^2\gamma_g}{G_g g} \quad (3-22)$$

ここで、せん断波速度とせん断弾性係数との関係

$$V_s = \sqrt{\frac{gG_g}{\gamma_g}} \quad (3-23)$$

を用いた。ここに、 γ_g ：地盤の単位体積重量 である。

式(3-20)および式(3-22)を、式(3-19)に代入し、 δ_s/δ_g を変位伝達係数 α_r として定義すれば、

$$\alpha_r = \frac{\delta_s}{\delta_g} = \frac{\frac{G_g}{G_s}}{\frac{b}{h} + \lambda \frac{G_g}{G_s}} \left[\lambda + \frac{\pi b}{2H} \frac{\cos \frac{\pi H_1}{2H}}{\sin \frac{\pi H_1}{2H} - \sin \frac{\pi(H_1-h)}{2H}} + \frac{\pi^2 \gamma_s}{2H^2 \gamma_g} t(b+h-2t) \frac{\sin \frac{\pi(H_1-h)}{2H}}{\sin \frac{\pi H_1}{2H} - \sin \frac{\pi(H_1-h)}{2H}} \right] \quad (3-24)$$

式(3-24)は、地震時地盤変形量 δ_g が既知のとき、構造諸元(t, b, h)、構造物設置位置(H_1)、表層厚(H)、地盤せん断弾性係数に対する地盤ばね定数の比(λ)、および構造物剛性に対する地盤せん断弾性係数の比(G_g/G_s)により、構造物の地震時変形量 δ_s が、

$$\delta_s = \alpha_r \delta_g \quad (3-25)$$

で求められることを示している。

なお、式(3-25)によれば、地震時地盤変形量 δ_g は、別途計算する必要があるが、1次元地盤応答解析コード「SHAKE」を用いるか、簡易的には、先の項目「2.水平地盤の地震時変位に関して」で述べた設計式を用いる方法もある。

3. 2 計算例

前項で誘導した変位伝達係数の算定式(3-24)を用いた計算例を述べる。

図 3-5 に、剛性比 G_g/G_s と変位伝達係数 α_r の関係を示す。図には、検証のため、動的 FEM によって変位伝達係数を計算した結果も示した。

動的 FEM 解析では、地盤をソリッド要素で、構造物を曲げモーメントと曲率の非線形性を考慮した梁でモデル化している。さらに、地盤-構造物連成の解析モデルに加速度を漸増させることによって、自由地盤の地震時変形量に対する構造物の地震時変形量の比を算定したものである。

図 3-5 によれば、剛性比（構造物剛性に対する地盤せん断弾性係数の比）が 0~5 の範囲において、変位伝達係数（地震時地盤変形量に対する構造物変形量の比）の算定式と動的 FEM の結果がほぼ一致していることがわかる。

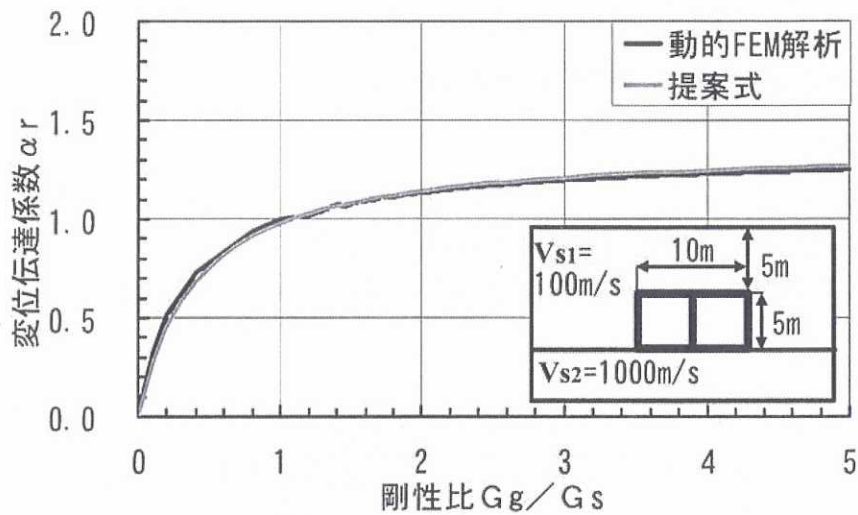


図 3-5 剛性比と変位伝達係数の関係 (参考文献 8)より引用)

図 3-5 によれば、剛性比 1.0 のとき、変位伝達係数は、ほぼ 1.0 に等しくなることがわかる。これは、構造物のみかけのせん断剛性が地盤剛性と同じになることで、地盤と構造物の相互作用がほとんど無くなることを意味している。

また、剛性比が 1.0 以上では、変位伝達係数が 1.0 よりも大きくなり、一方剛性比が 1.0 以下では変位伝達係数が 1.0 よりも小さくなることがわかる。これは、地下構造物の地震時変形量が、地盤剛性と構造物剛性の大小関係で決まることを意味しており、構造物剛性に比べて地盤剛性が大きい場合には、構造物変形が地盤変形よりも増大し、一方構造物剛性に比べて地盤剛性が小さい場合には、構造物変形が地盤変形よりも減少することを示している。

以下では、上記の変位伝達係数による方法を用いた、線状地下構造物の耐震照査例を示す。図 3-6 に、地下構造物と地盤構造を示す。図 3-7 には、1次元地盤応答解析によって求めた地盤変形角を示す。

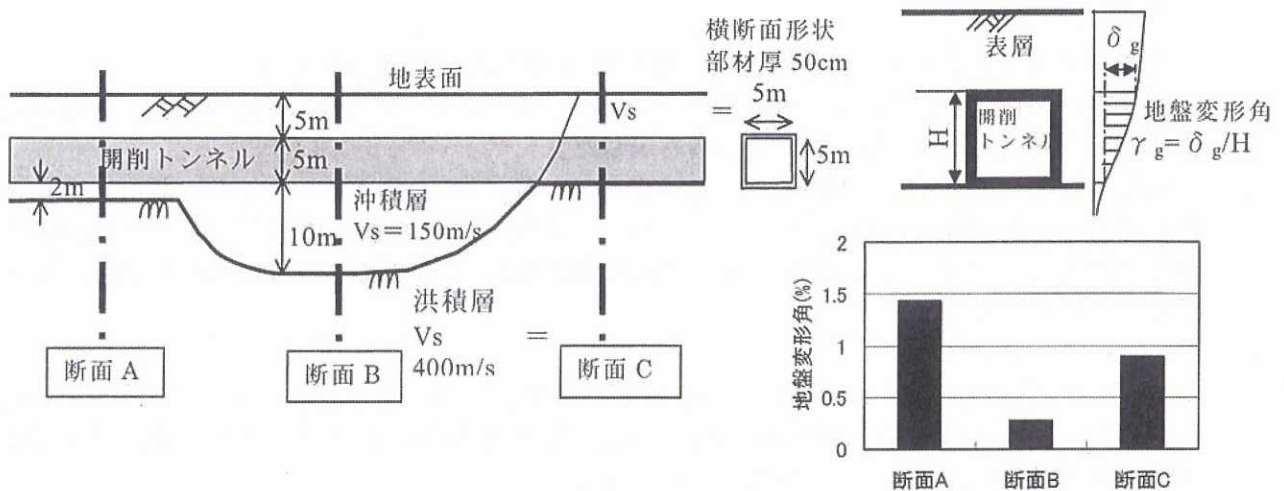


図 3-6 トンネル長手方向の地盤構造 (参考文献 9)より引用)

図 3-7 地盤変形角

表 3-1 に、トンネルの構造諸元および地盤諸元を示す。

図 3-8 に、耐震性照査のフローを示す。検討に用いた地震動は、土木学会・コンクリート標準示方書・耐震性能照査編に例示される L2 地震動（内陸型）とした。

図 3-9 および図 3-10 に照査結果を示す。ここに、終局時とは、構造物が崩壊しないことを前提に、構造物の荷重-変位関係において荷重低下が生じ始める変形時（曲げ破壊には圧縮側コンクリートのひずみが、せん断破壊にはせん断ひずみが急増し始める変形）とした。

それらによると、断面 A,C ともに部材降伏が生じることがわかる。また、終局限界に対しては、いずれの断面も照査を満足しているが、A 断面が最も危険な箇所であると判断される。

表 3-1 トンネルの構造・地盤諸元

断面	構造諸元								地盤条件		
	内空幅 b(m)	内空高 h(m)	部材厚 t(m)	有効高さ d(m)	主鉄筋比 (ρ_t)	せん断補強鉄筋	圧縮強度 f_c (N/mm ²)	鉄筋降伏強度 f_y (N/mm ²)	土被り (m)	基盤深さ (m)	せん断波速度 Vs(m/s)
A	5	5	0.5	0.43	0.0072	なし	23	350	5	12	150
B			〔ハンチなし th=0〕							20	
C										10	200

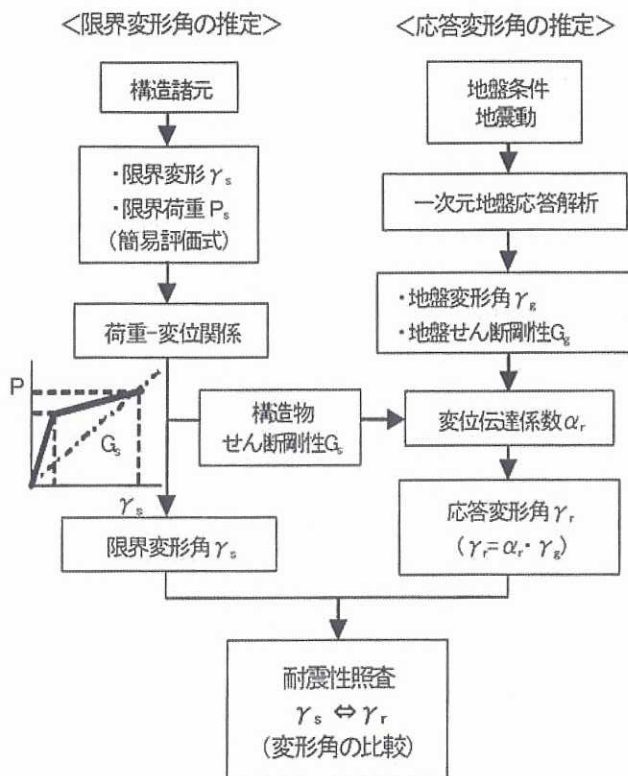


図 3-8 耐震性照査フロー
(参考文献 9)より引用)

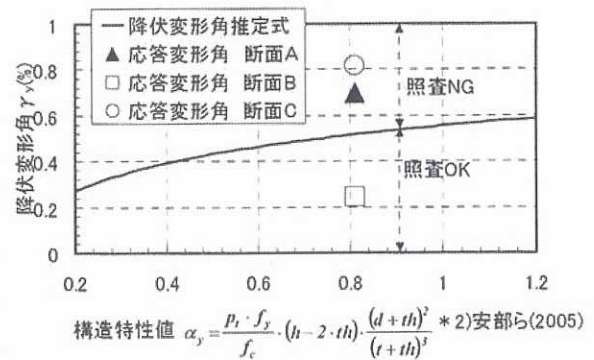


図 3-9 降伏時の照査結果

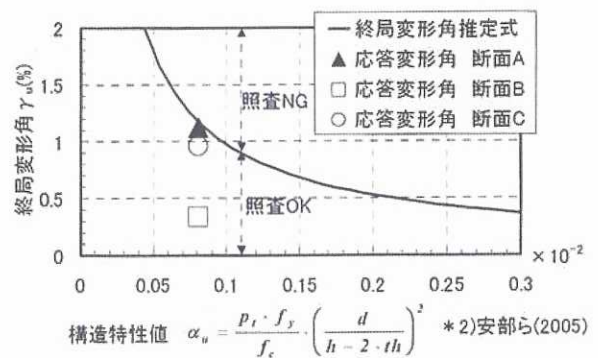


図 3-10 終局時の照査結果

(参考文献 9)より引用)

1. 応力の定義

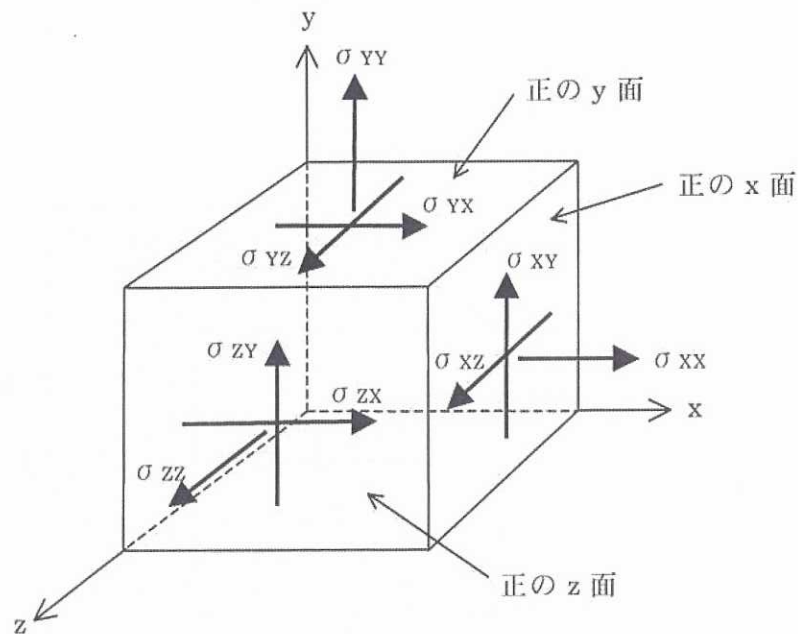
一般に、連続体の力学においては、連続体内部に発生する力（緊張状態）を表すために、応力の概念が用いられる。

応力は、連続体内部の断面を設定し、その断面上に作用する単位面積あたりの力として定義される。一般には、応力を定義するための色々な方向の微小断面が考えられるわけであるが、解析の都合上、3次元のデカルト座標系（直角座標系 x, y, z ）において、 x 軸、 y 軸および z 軸に垂直な断面上の応力が指標（未知数）とされる。

参図 1 に示すように、連続体内部に微小な立方体を考え、その面状に発生する単位面積あたりの力を考慮する。立方体の 6 面のうち、 x 、 y および z 軸の垂直な面を、それぞれ x 面、 y 面および z 面と呼ぶことにする。そうすると、例えば、 x 面は 2 面存在するが、 x 軸の座標が大きい方の面を正の面と呼ぶ。

応力を、正の面で定義することとし、一つの面上に、3 つの応力成分が対応する。正の x 面でいうと、 σ_{xx} 、 σ_{xy} および σ_{xz} である。それぞれ、 x 面の作用する x 方向の直応力、 x 面に作用する y 方向せん断応力、および x 面に作用する z 方向せん断応力を表している。応力成分の下付きの添え字の 2 つのうち、最初の方は、応力成分が作用する面を、後の方は、応力成分の向きを表すことになる。

なお、応力を定義した正の 3 面以外の負の面には、作用反作用の法則から、正の面の応力と大きさが同じで方向が反対の応力が作用することになる。例えば、負の x 面の x 方向直応力は、 σ_{xx} と大きさが同じで、その作用方向は、 x 軸の負を向くことになる。したがって、参図 1 では、有限な大きさの立方体を、説明の都合上考えてはいるが、実際には、1 辺の長さが限りなくゼロに近い立方体を考えている。



参図 1 応力の定義

2. 力の釣り合い方程式

連続体内部の各辺の大きさが、 dx 、 dy および dz である微小直方体を考え、その微小直方体に関する力の釣り合いを考慮する。

さきほどの応力の定義で用いた参図 1 では、立方体の面と面の間で、応力の変化は無いものとしたが、ここでは、微小直方体の面の間で、応力の変化が生じているものと仮定する。また、微小直方体の力の釣り合いを考えるので、直方体の 6 面全てに作用する力を考慮する必要がある。

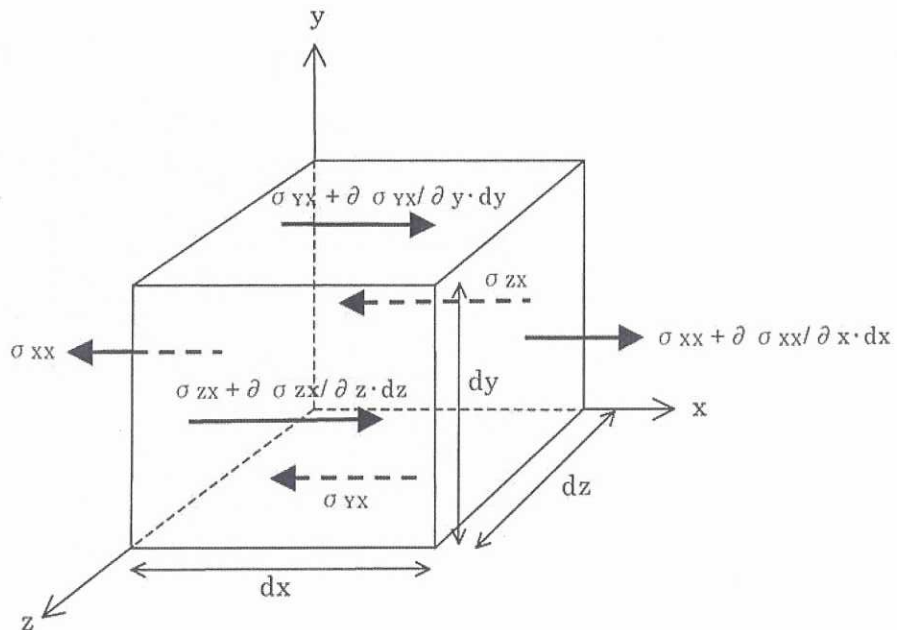
参図 2 では、 x 方向に働く力の釣り合いを考慮するため、微小直方体の 6 面上で、 x 方向の応力成分のみを図示している。

また、微小直方体には、単位体積あたりの大きさが f_x の物体力が、 x 方向に作用しているものと仮定する。ここに、物体力とは、連続体の実質部分に作用する力のことであり、重力や慣性力などが含まれる。

参図 2 を参考にして、 x 方向の力の釣り合い式は、以下のように書くことができる。

$$\left\{ -\sigma_{xx} + \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) \right\} dydz + \left\{ -\sigma_{yx} + \left(\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy \right) \right\} dzdx + \left\{ -\sigma_{zx} + \left(\sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz \right) \right\} dxdy + f_x dxdydz = 0 \quad (1)$$

式(1)において、微小区間における応力の変化分は、その変化の勾配 ($\partial \sigma_{xx} / \partial x$ など) に距離 (dx など) を乗じることで考慮されている。さらに、応力が単位面積あたりの力であること、物体力が単位体積あたりの力であることを考慮して、それぞれ力が作用している面積と体積を、力に乗じていることに注意されたい。



参図 2 x 方向の力の釣り合い

式(1)を整理して、次式を得る。

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + f_x = 0 \quad (2)$$

同様に、y方向およびz方向の力の釣り合い方程式として、次式が得られる。

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + f_y = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 \quad (4)$$

上記の式(2)、(3)および(4)が、釣り合い方程式となる。

次に、モーメントの釣り合いを考えてみる。

参図3を参照して、z軸方向周りに関して、力のモーメントの釣り合いを考慮する。

$$\left(\sigma_{xy} + \sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz \frac{dx}{2} - \left(\sigma_{yx} + \sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} = 0 \quad (5)$$

式(5)では、参図3（参図2をz軸の正の方向から負の方向を見たもの）において、O点に関する左周りモーメントを正とし、応力成分に作用面積を乗じ、さらに腕の長さに乗じたものである。

式(5)より、高次の微小項を無視すれば、次式を得る。

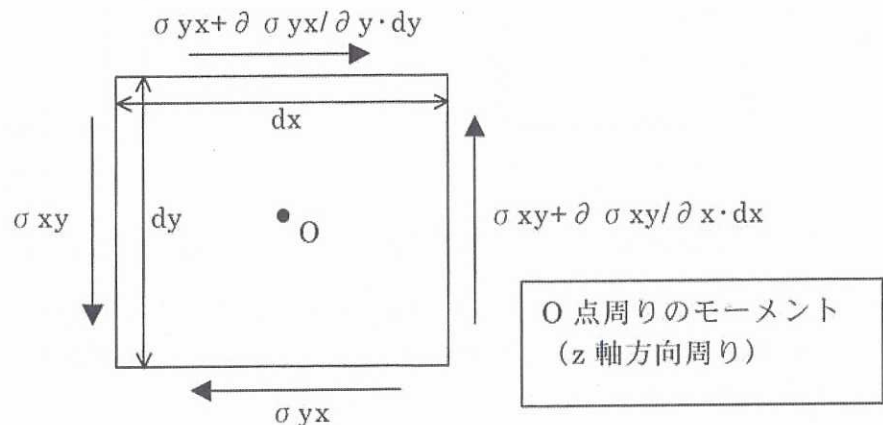
$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} \quad (6)$$

同様に、y軸およびx軸方向周りのモーメントの釣り合いから、次式を得る。

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} \quad (7)$$

$$\sigma_{zy} = \sigma_{yz} \quad (8)$$

式(6)~(8)は、応力成分の対称性を示していることがわかる。また、独立な応力成分が、6個になることも示している。



参図3 z軸方向周りのモーメントの釣り合い

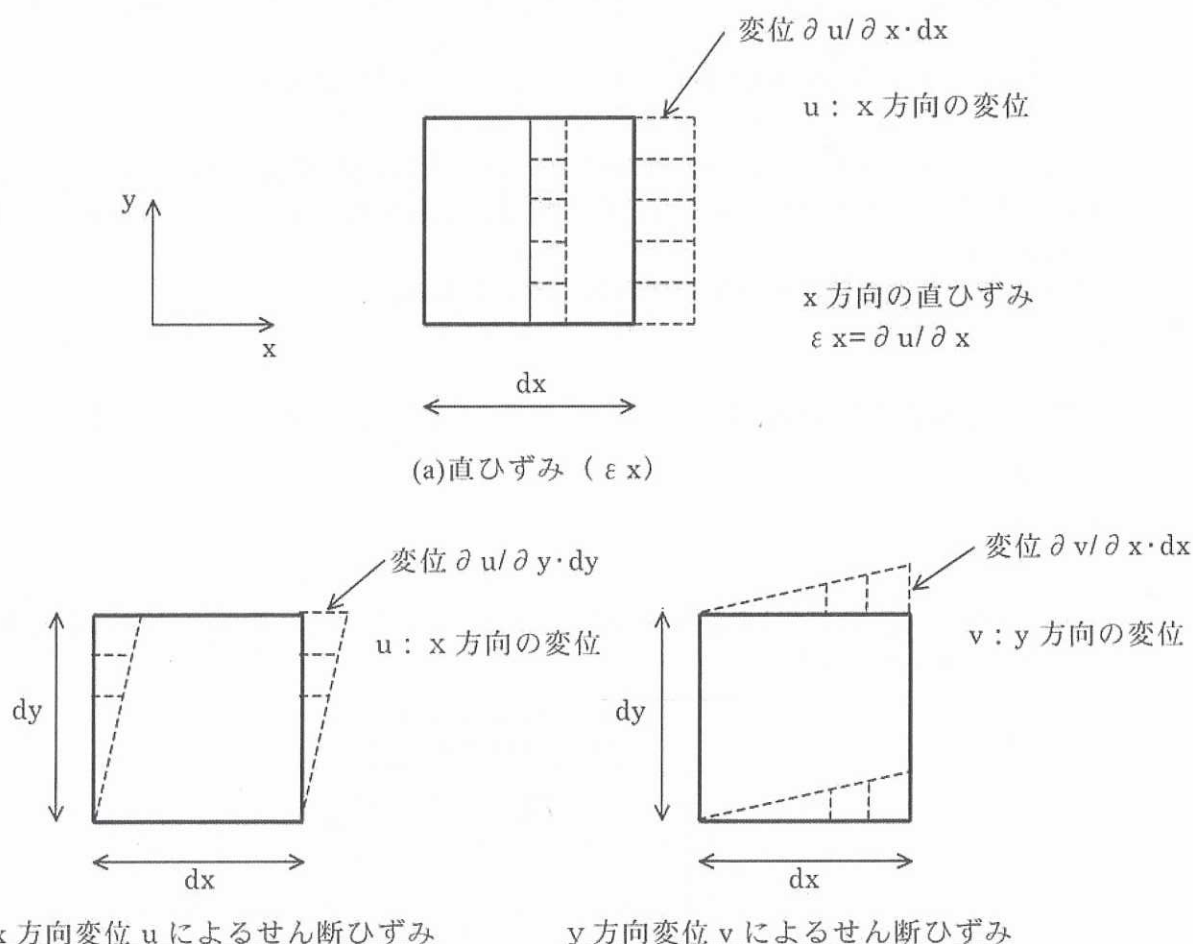
3. ひずみと変位の関係

連続体の変形の議論をするために、連続体内部における単位長さあたりの変形量であるひずみ（相対変位量）と、力を作用させる前にあった位置からの移動量である変位との関係を求める必要がある。すなわち、ひずみ量を変位量で表しておくわけである。

参図4を参照して、直ひずみ ε_x 、 ε_y および ε_z 、せん断ひずみ γ_{xy} 、 γ_{yz} および γ_{zx} は、 u 、 v および w をそれぞれ x 、 y および z 方向の変位として、次式で表すことができる。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (9)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (10)$$



上記の両者によって生じるせん断ひずみの和から、せん断ひずみ γ_{xy} は、 $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ で表される。(なお、上記2者の変形が、両者とも正のせん断変形であることに注意されたい)

(b)せん断ひずみ (γ_{xy})

参図4 ひずみと変位の関係

4. 応力・ひずみ関係

以下の議論では、直応力 σ_{xx} などについては、簡単のため、 σ_x と記することとする。

いま、解析対象とする連続体がフックの法則に従う線形材料である場合には、応力とひずみの関係に、簡単な比例関係を仮定できる。

参図5に示すように、立方体をx方向の垂直応力 σ_x で引っ張った場合を考える。

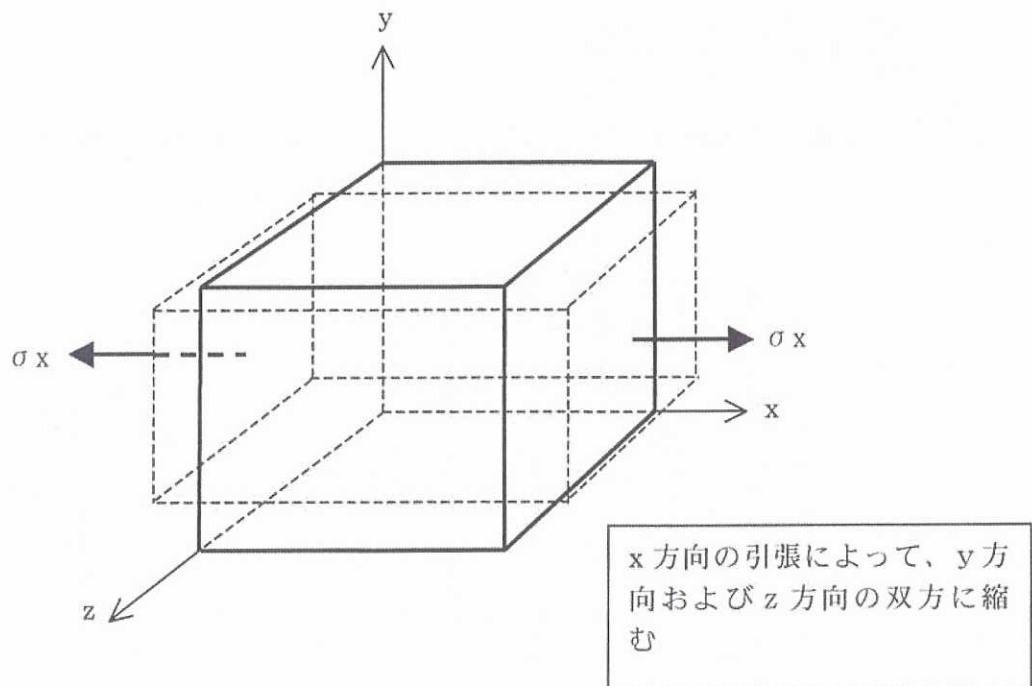
まず、 σ_x の作用により、x方向の直ひずみ ε_x が生じる。その値は、弾性係数（ヤング係数）Eを用いて、次式で表される。

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (11)$$

また、いわゆるポアソン効果によって、同時に横方向のひずみが生じる。参図5に示すように、y方向およびz方向の両方に、収縮する変形が生じる。その大きさは、ポアソン比を ν として、y方向とz方向の直ひずみとして、次式で表されることが、実験的に確かめられている。

$$\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (12)$$

式(12)より、ポアソン比 ν は、引張ないし圧縮応力を受けたとき、縦ひずみに対する横ひずみの比を表すものであると言える。



参図5 ポアソン効果

式(11)と(12)を用いて、 σ_x 、 σ_y および σ_z の3つが作用する場合に拡張すれば、ある直応力による同じ方向の直ひずみと他の直応力によるポアソン効果で生じた直ひずみを足し合わせることで、次式を得る。

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \{ \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \{ \sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x) \} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \{ \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \}\end{aligned}\tag{13}$$

ここに、 E ：ヤング係数、 ν ：ポアソン比 である。

次に、せん断応力とせん断ひずみの関係を考える。

いま、参図6に示すように、 $\sigma_z = \sigma$ 、 $\sigma_y = -\sigma$ および $\sigma_x = 0$ なる条件の応力状態を考慮する。

弾性体の内部に、正方形ABCDを考えると、それぞれの辺にはせん断応力 τ のみが働く応力状態となる(純せん断状態)。これは、三角形OBCの力の釣り合いを考えるとわかる。三角形OBCの力の釣り合いから、次式を得る。(τ が作用する面の面積が σ が作用する面積の $(\sqrt{2})$ 倍であることに注意)

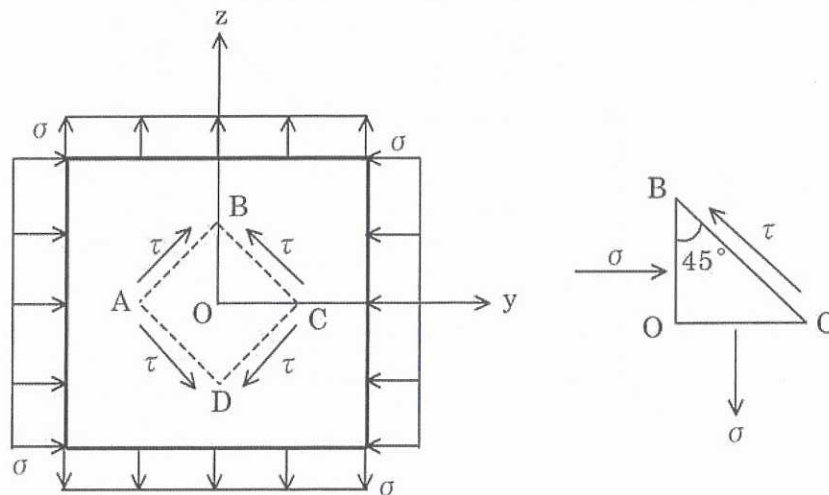
$$\tau = \sigma\tag{14}$$

また、正方形ABCDは、せん断応力 τ によって、ひし形にひしゃげる(BDの長さが増加しACの長さが減少する)ような変形をすることになる。

すなわち、変形後のOAに対するOBの比は、 $\angle BOA$ が 45° から大きくなることを考慮し、次式で表される。

$$\frac{OB}{OA} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 + \varepsilon_z}{1 + \varepsilon_y}\tag{15}$$

ここに、 γ ：正方形ABCDのせん断ひずみ、 ε_z 、 ε_y ：zおよびy方向直ひずみ



参図6 せん断応力とせん断ひずみ

式(13)において、 $\sigma_z = \sigma$ 、 $\sigma_y = -\sigma$ および $\sigma_x = 0$ を考慮すれば、

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= 0 \\ \varepsilon_y &= -\frac{(1+\nu)\sigma}{E} \\ \varepsilon_z &= \frac{(1+\nu)\sigma}{E}\end{aligned}\tag{16}$$

したがって、式(15)に代入すれば、

$$\frac{1+\varepsilon_z}{1+\varepsilon_y} = \frac{1 + \frac{(1+\nu)\sigma}{E}}{1 - \frac{(1+\nu)\sigma}{E}}\tag{17}$$

さらに、せん断ひずみ γ が微小であると仮定すれば、式(15)から、

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\gamma}{2}}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\gamma}{2}} = \frac{1 + \frac{\gamma}{2}}{1 - \frac{\gamma}{2}}\tag{18}$$

式(15)、(17)および(18)より、次式が得られる。

$$\gamma = \frac{2(1+\nu)\sigma}{E}\tag{19}$$

さらに、式(14)を考慮することで、せん断ひずみ γ とせん断応力 τ との間の関係として、次式を得る。

$$\gamma = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau\tag{20}$$

ここで、

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}\tag{21}$$

と置けば、 G はせん断弾性係数となる。すなわち、

$$\gamma = \frac{1}{G}\tau\tag{22}$$

式(22)を、他の方向のせん断ひずみに対して拡張すれば、

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx}\tag{23}$$

以上より、式(13)と(23)が、6つの応力成分とひずみ成分を結ぶ、応力・ひずみ関係式となる。

ただし、それらの式は、ひずみが応力の関数として与えられているので、場合によっては、応力をひずみの関数で与えた方が便利なこともある。

以下では、応力をひずみの関数で表すことを考える。

式(13)を加え合わせて、

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\tag{24}$$

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (25)$$

を定義すれば、次式を得る。

$$e = \frac{1-2\nu}{E} \Theta \quad (26)$$

ここに、 e は単位体積膨張（体積ひずみ）と呼ばれる。

強さ p の一様な静水圧の場合には、 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ であるから、式(26)より、

$$e = -\frac{3(1-2\nu)p}{E} \quad (27)$$

式(27)は、体積ひずみと静水圧の関係式を表している。ここで、

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (28)$$

を定義し、 K は体積弾性係数と呼ばれるものになる。すなわち、

$$e = -\frac{1}{K} p \quad (29)$$

式(13)を、 σ_x について解けば、次式を得る。

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y + \nu\varepsilon_z \right\} \quad (30)$$

同様にして、 σ_y および σ_z についても、次式を得る。

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \nu\varepsilon_x + (1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_z \right\} \quad (31)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \nu\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y + (1-\nu)\varepsilon_z \right\} \quad (32)$$

式(30)～(32)を、体積ひずみ e を用いて書き直せば、

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_x \\ \sigma_y &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_y \\ \sigma_z &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_z \end{aligned} \quad (33)$$

また、

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (34)$$

なる λ （ラムの定数）を定義すれば、

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda e + 2G\varepsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda e + 2G\varepsilon_y \\ \sigma_z &= \lambda e + 2G\varepsilon_z \end{aligned} \quad (35)$$

5. 弾性体の運動方程式

前項までに誘導した基本式を書き下すと以下のようになる。

力の釣り合い式として、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= 0\end{aligned}\tag{36}$$

ここに、直応力は σ で、せん断応力は τ で記し、応力成分の対称性を考慮した。また、 f_x 、 f_y および f_z は、単位体積あたりに作用する物体力である。

次に、ひずみと変位の関係式として、

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}\tag{37}$$

ここに、 u 、 v および w は、それぞれ x 、 y および z 方向の変位である。また、直ひずみは ε で、せん断ひずみは γ で記した。

さらに、応力・ひずみ関係式として、

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda e + 2G\varepsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda e + 2G\varepsilon_y \\ \sigma_z &= \lambda e + 2G\varepsilon_z \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\ \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}\end{aligned}\tag{38}$$

ここに、

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\tag{39}$$

上記の(36)~(38)の方程式系は、釣り合い式3個、ひずみ・変位関係式6個、応力・ひずみ関係式6個となり、全部で15個となることがわかる。一方、未知数の数は、応力6成分、ひずみ6成分、変位3成分となり、全部で15個になる。したがって、方程式と未知数の数が一致し、解が求められることになる。

次に、地震時などのように、時間とともに応力や変位が変化するような動的問題について考える。

この場合には、動的問題において、連続体に作用する慣性力を外力（物体力）として考慮することにより、静的な問題に置き換えることができる（ダランベールの原理）。

慣性力は、加速度の大きさに質量を乗じたものに、符号を変えることで表される。すなわち、質量 m の物体が加速度 α で運動している場合には、慣性力は、 $-m\alpha$ となる。

式(36)では、物体力は、静的な力として扱われているが、動的問題の場合には、物体力を慣性力に置き換えればよい。すなわち、

$$f_x = -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad f_y = -\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad f_z = -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (40)$$

ここに、 ρ は、解析対象とする連続体と密度（単位体積あたりの質量）である。また、各変位成分の時間に関する 2 階微分により加速度が考慮されている。

したがって、式(36)の代わりに、次式を用いることになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (41)$$

以上より、動的問題に対しては、式(41)と式(37)と式(38)を連立させればよいことになる。

さらに、後の便宜のため、変位のみで表された運動方程式を導入する。なお、以下の定式においては、物性値（ E や ν など）は空間的に変化しないものと仮定する。

式(37)を式(38)に代入すると、

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \tau_{zx} &= G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

式(42)を式(41)の第 1 式に代入すれば、

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + G \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

すなわち、

$$G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (43)$$

同様に、式(41)の第2式、第3式に関して、次式を得る。

$$G\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + (\lambda + G)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (44)$$

$$G\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + (\lambda + G)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (45)$$

上記の式(43)~(45)が、変位3成分 (u , v および w) を未知数とした3次元弾性体の運動方程式となる。

ここに、 G : せん断弾性係数、 λ : ラメの定数、 ρ : 密度 であり、 G および λ に関しては、 E : 弾性係数 (ヤング係数) および ν : ポアソン比として次式で表される。

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (46)$$

さらに、

$$\lambda + G = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{G}{1-2\nu}$$

を考慮すれば、式(43)~(45)に代わりに、次式が得られる。

$$G\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (47)$$

$$G\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (48)$$

$$G\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \frac{G}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (49)$$

【参考文献】

- 1) 社団法人地盤工学会 (2000) : サマースクールテキスト 物理数学的にみた土質力学、地盤工学における物理数学の応用に関する研究委員会
- 2) チモシェンコ・ゲーディア (1973) : 弾性論、金多潔監訳、コロナ社
- 3) Y.C.ファン(1977) : 固体の力学/理論、大橋義夫、村上澄男、神谷紀生共訳、培風館

参考資料 1-2 波動方程式について

弾性体の動的問題を解く場合に、しばしば「波動方程式」と呼ばれる、2階偏微分方程式が現れることが多い。

以下では、一次元波動の簡単な場合を想定して、解の特徴や求め方を説明する。

z方向に震動成分を持ち、y方向に伝わるような一次元のせん断波動（平面波：等位相面が平面となるような波動）を考える。

このとき、前項の式(49)（z方向の変位で表した運動方程式）において、 $\partial/\partial z=0$ （z方向に変位が変化しない）および $\partial/\partial x=0$ （x方向に変位が変化しない）を仮定すれば、次式を得る。

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (50)$$

式(50)は、鉛直方向（y方向）に伝播する水平せん断震動を表しているが、以下に示す。ここで、

$$C = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (51)$$

なるCを定義すれば、次式を得る。

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (52)$$

f(y)を任意の関数として、 $w=f(y-Ct)$ と置けば、

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f''(y-Ct), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = C^2 f''(y-Ct)$$

より、 $w=f(y-Ct)$ は、式(52)を満足するから、式(52)の解であることがわかる。なお、同様にして、 $w=f(y+Ct)$ も式(52)の解であることが示される。

参図7に示したように、解 $w=f(y-Ct)$ の幾何学的意味から、yの正方向の速度Cで進む波動であることがわかる。さらに、変位wの振動の方向は、波の進行方向に垂直なので、せん断波を表している。

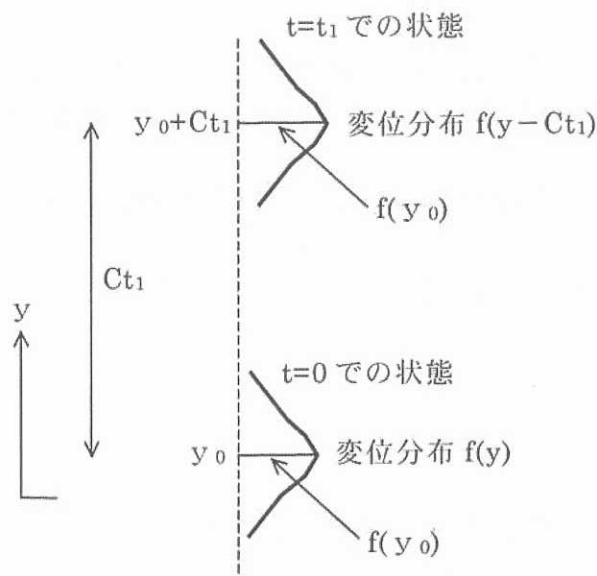
したがって、上記の定数Cは、せん断波の伝播速度を表すことになり、これを改めて V_s と書けば、

$$V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (53)$$

となることがわかる。ここに、G：せん断弾性係数、 ρ ：密度 である。

式(53)で表される V_s は、せん断波速度あるいはS波速度と呼ばれる。

以上のように、式(52)の方程式というのは、変位wが振動しながら、yの正あるいは負方向に伝播する波動を表すので、波動方程式と呼ばれる。



参図7 解 $w=f(y-Ct)$ の幾何学的意味

次に、波動方程式(52)の一般解を求める方法を示す。

偏微分方程式の一般解を求めるには、変数分離法がよく用いられる。

解の形が、時間 t および位置 y の関数で分離されると仮定し、次式の形に置く。

$$w = Y(y) \cdot T(t) \quad (54)$$

式(54)の $Y(y)$ は、ある時刻における変位の分布形状を表しており、 $T(t)$ は、ある位置における時間的な変化を示すことになる。振動・波動問題では、前者を「変位モード」、後者を「時間関数」と呼ぶことがある。

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = T \frac{d^2 Y}{dy^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = Y \frac{d^2 T}{dt^2}$$

より、式(52)は、

$$\frac{C^2}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (55)$$

式(55)の右辺は y のみの関数、左辺は t のみの関数であるから、式(55)は定数になる。したがって、その値を $-\omega^2$ と置けば、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T}{dt^2} &= -\omega^2 T \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} &= -\left(\frac{\omega}{C}\right)^2 Y \end{aligned} \quad (56)$$

式(56)は、単振動の方程式であるから、式(56)の第1式の解として、2つの独立な解

$$T = \cos \omega t, \quad \sin \omega t \quad (57)$$

あるいは、

$$T = e^{i\omega t}, e^{-i\omega t} \quad (58)$$

が解となる。これは、実際に、式(56)の第1式に代入することで確かめることはできる。ここに、 i は虚数単位 ($i = \sqrt{-1}$) である。なお、式(57)あるいは(58)の形から、 ω は(円)振動数を表すことがわかる。

同様に、式(56)の第2式の解として、2つの独立な解

$$Y = \cos\left(\frac{\omega}{C}y\right), \sin\left(\frac{\omega}{C}y\right) \quad (59)$$

あるいは

$$Y = e^{i\frac{\omega}{C}y}, e^{-i\frac{\omega}{C}y} \quad (60)$$

が解となる。

したがって、波動方程式(52)の一般解としては、

$$w = \left(A e^{i\frac{\omega}{C}y} + B e^{-i\frac{\omega}{C}y} \right) e^{i\omega t} \quad (61)$$

あるいは

$$w = \left(A \cos\left(\frac{\omega}{C}y\right) + B \sin\left(\frac{\omega}{C}y\right) \right) e^{i\omega t} \quad (62)$$

などで表すことができる。ここに、定数 A および B は、境界条件より定まる積分定数である。

1. ベッセル関数

2次元の波動方程式を円筒座標系で定式化した場合に、その解がベッセル関数と呼ばれるものになることがある。

波動の種別でいうと、波の等位相面が円形になるような場合（円筒波）に相当する。水溜りに小石を投げ入れたとき、円形の波紋が周囲に拡がってゆくが、その水の波の運動（変位）に相当すると考えてよい。

波の等位相面が平面であるような平面波の場合（例えば、解析コード「SHAKE」で扱うようなせん断波）には、地盤内の材料減衰が存在しない限り、波動伝播に伴う振幅の減衰は生じない。しかしながら、上記のような円筒波では、中心から周囲に伝播することで、円形の大きさが増大してゆくの、振幅は次第に減衰（幾何減衰）してゆくことになる。ベッセル関数は、そのような減衰を数理的にモデル化したものと考えることができる。

以下では、ベッセル関数の数学的な定義には、あまり拘らず、グラフでイメージを掴むことにする。また、ベッセル関数の漸近展開についても説明を加える。

ベッセル関数とは、次の2階常微分方程式（ベッセルの微分方程式）の解である。

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) w = 0 \quad (63)$$

ここに、 ν は、実数定数である。

式(63)は、2つの独立な解を持っており、それぞれ ν 次のベッセル関数およびノイマン関数と呼ばれ、 $J_\nu(x)$ および $N_\nu(x)$ なる記号で表される。

したがって、式(63)の一般解は、上記2つの関数の線形結合である

$$w = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x) \quad (64)$$

で表すことができる。ここに、 C_1 および C_2 は、境界条件で定まる積分定数である。

また、ベッセル関数 $J_\nu(x)$ および $N_\nu(x)$ の代わりに、ハンケル関数 $H_\nu^{(1)}(x)$ および $H_\nu^{(2)}(x)$ を用いることもある。すなわち、式(63)の一般解として、

$$w = C_1 H_\nu^{(1)}(x) + C_2 H_\nu^{(2)}(x) \quad (65)$$

ここに、

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= J_\nu(x) + iN_\nu(x) \\ H_\nu^{(2)}(x) &= J_\nu(x) - iN_\nu(x) \end{aligned} \quad (66)$$

であり、 $H_\nu^{(1)}(x)$ ：第1種ハンケル関数、 $H_\nu^{(2)}(x)$ ：第2種ハンケル関数 である。

これは、単振動の一般解において、 $\cos \omega t$ および $\sin \omega t$ の線形結合（ $C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ ）を用いる代わりに、複素関数 $e^{i\omega t}$ および $e^{-i\omega t}$ の線形結合（ $C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$ ）を用いることと、類似しているといえる。この場合には、式(66)に類似の関係として、

$$\begin{aligned} e^{i\omega t} &= \cos \omega t + i \sin \omega t \\ e^{-i\omega t} &= \cos \omega t - i \sin \omega t \end{aligned} \quad (67)$$

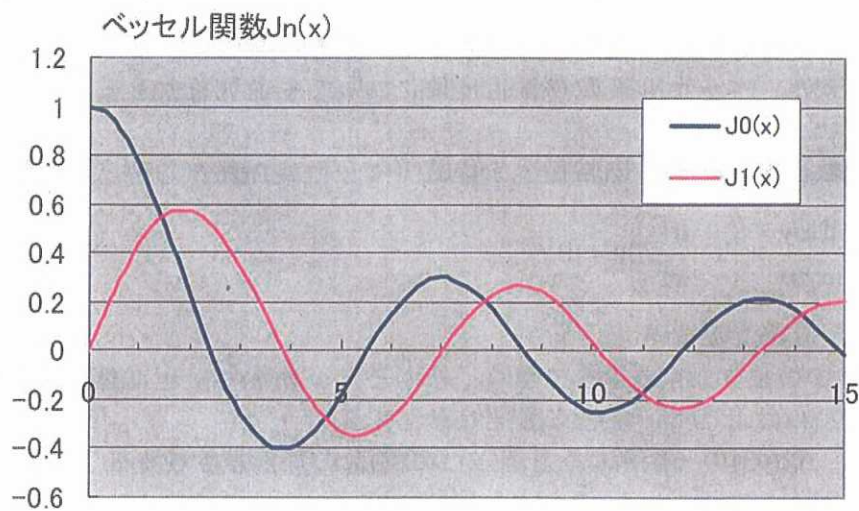
なる関係（オイラーの関係式）を用いることになる。

ベッセル関数 $J_\nu(x)$ および $N_\nu(x)$ については、実際には、 ν が整数でしかも 0 や 1 のときのもの、よく現れることが多い。

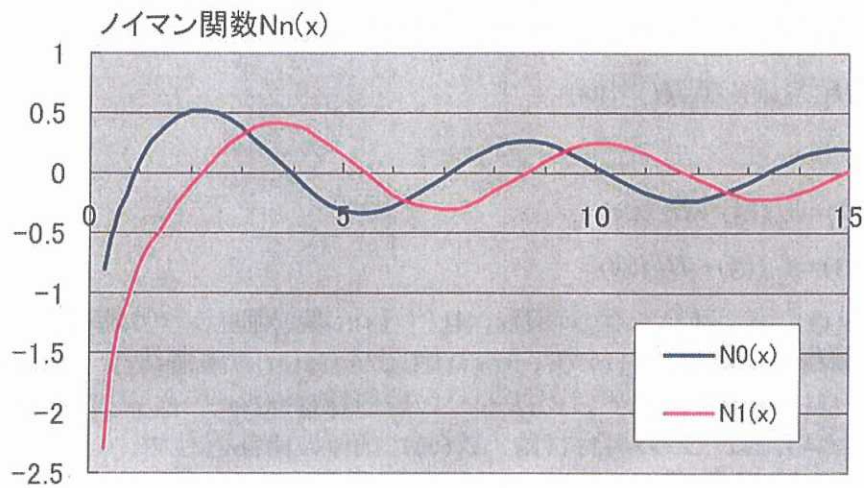
以下では、 ν が 0 と 1 の場合のベッセル関数のグラフを示す。参図 8(a) および (b) に示す。(a) は 0 次および 1 次のベッセル関数、(b) は 0 次および 1 次のノイマン関数を表している。

参図 8 は、エクセルを用いて描いたものである。なお、エクセルには、ベッセル関数の計算機能も付加されている。

$J_\nu(x)$ について見ると、 x の増大とともに、三角関数のように振幅がプラスとマイナスに振動することがわかる。また、振幅が、 x の増加とともに小さくなる（減衰する）傾向があることがわかる。



(a)ベッセル関数 $J_0(x)$ と $J_1(x)$



(b)ノイマン関数 $N_0(x)$ と $N_1(x)$

参図 8 ベッセル関数のグラフ

次に、 $N_\nu(x)$ を見ると、振幅が振動することや x の増加によって振幅が減衰する傾向を持つことは、 $J_\nu(x)$ と同じである。 $N_\nu(x)$ の特徴は、 $x=0$ が特異点になっており、 $x=0$ で $-\infty$ の値を持つことである。

2. ベッセル関数の漸近展開

ベッセル関数の引数が大きいところでの挙動を調べたいときの方法として、漸近展開と呼ばれるものがある。これは、引数が大きいところでの挙動、すなわち漸近線を求めることに相当する。

まず、簡単な関数の漸近展開を、考えてみる。

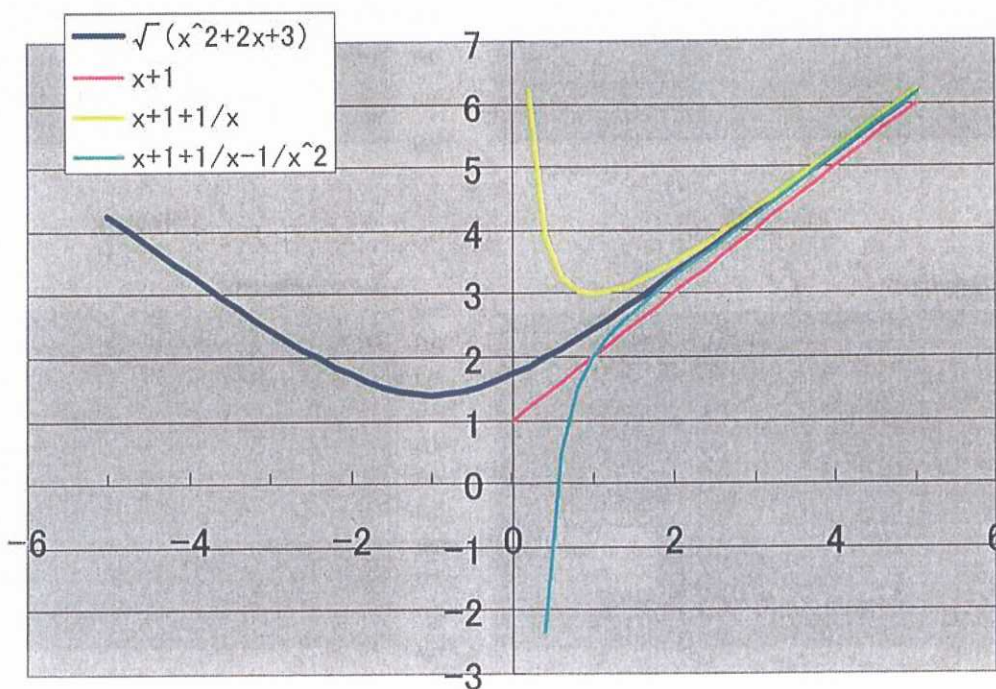
いま、関数 $\sqrt{x^2+2x+3}$ を考えると、以下のように展開できる。

$$\sqrt{x^2+2x+3} = x+1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^3} + \dots \quad (68)$$

式(68)の右辺の高次項は、 $x \rightarrow +\infty$ で、ゼロに近づくことから、左辺の関数の漸近線の方程式を表すと解釈できる。また、右辺の項を高次まで取ることにより、 x の値が大きいところでの近似度を上げることができる。

すなわち、式(68)の左辺の関数の x が大きいところでの近似式として、式(68)の右辺が成立するというので、次数を大きくすれば、それだけ精度の良い近似式となる。式(68)は、漸近展開と呼ばれる。

上記のことを、グラフで確かめたのが、参図 9 である。式(68)の右辺の項を多くとるほど（高次まで考慮するほど）、元の関数 $\sqrt{x^2+2x+3}$ の x が大きいところでの近似が良くなることがわかる。

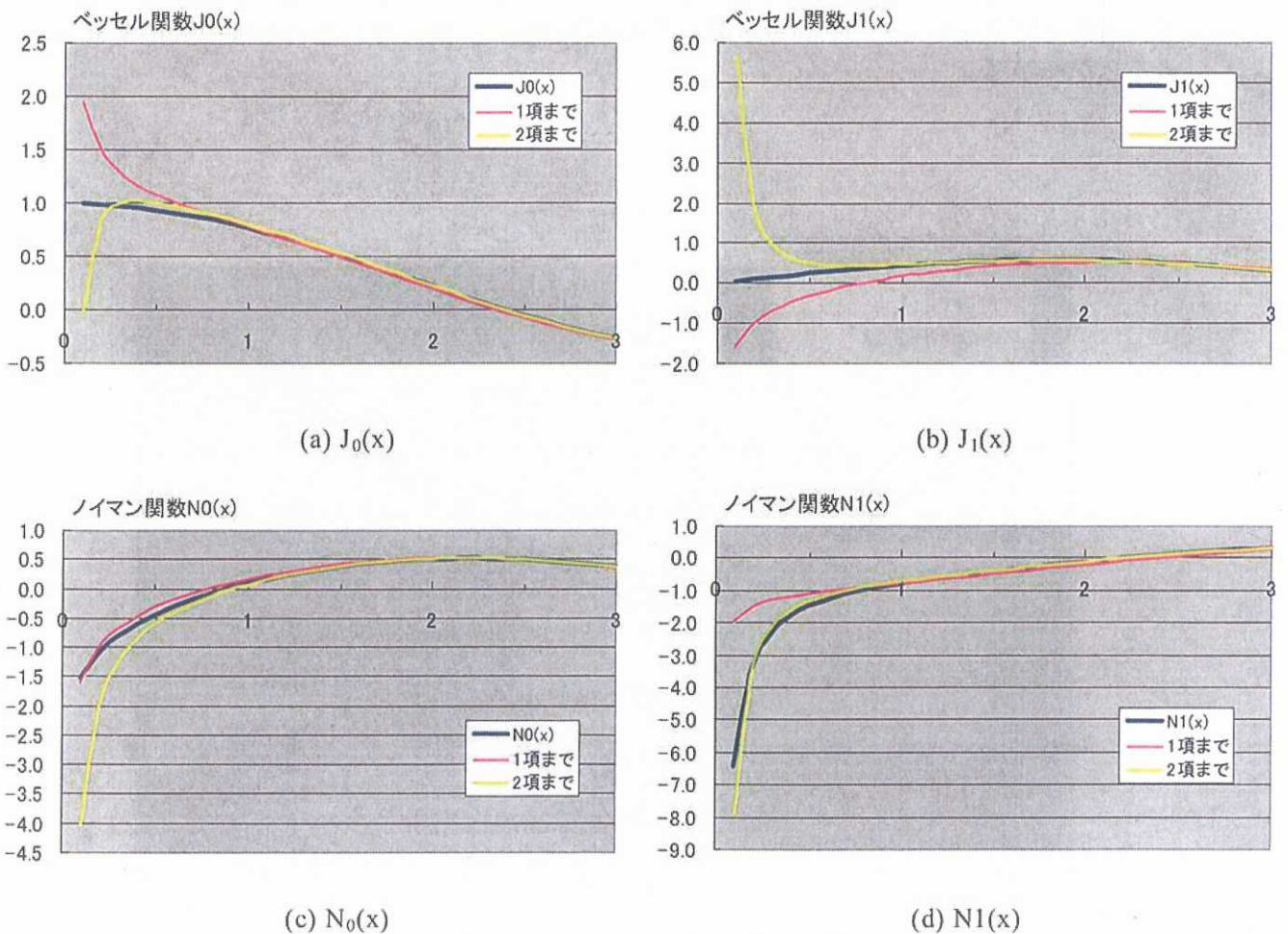


参図 9 関数 $\sqrt{x^2+2x+3}$ の漸近展開の様子

次に、ベッセル関数の漸近展開を考えると、0次および1次のベッセル関数およびノイマン関数の漸近展開は、次式のように書くことができる。次式では、漸近展開の2項目までを考慮した。

$$\begin{aligned}
 J_0(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8x} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \\
 J_1(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \cos\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) - \frac{3}{8x} \sin\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) \right\} \\
 N_0(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{8x} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right\} \\
 N_1(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \sin\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) + \frac{3}{8x} \cos\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) \right\}
 \end{aligned}
 \tag{69}$$

参図 10 に、式(69)を用いて、漸近展開において1項目までを考慮した場合と2項目までを考慮した場合を、元のベッセル関数のグラフと比較した。引数 x の値が大きくなると、ほとんど元のベッセル関数の等しくなるので、 x が3までを比較している。 x が2あたりで、1項目まで考慮した場合と2項目まで考慮した場合で差異が小さくなるが、2項目まで考慮した方が、 x の増加に伴う真値への近づき方が速くなっている。



参図 10 ベッセル関数の漸近展開の様子

【参考文献】

- 1) 犬井鐵郎 (1977) : 偏微分方程式とその応用、応用数学講座第9巻、コロナ社
- 2) 吉田耕作ほか (1975) : 応用数学便覧、丸善

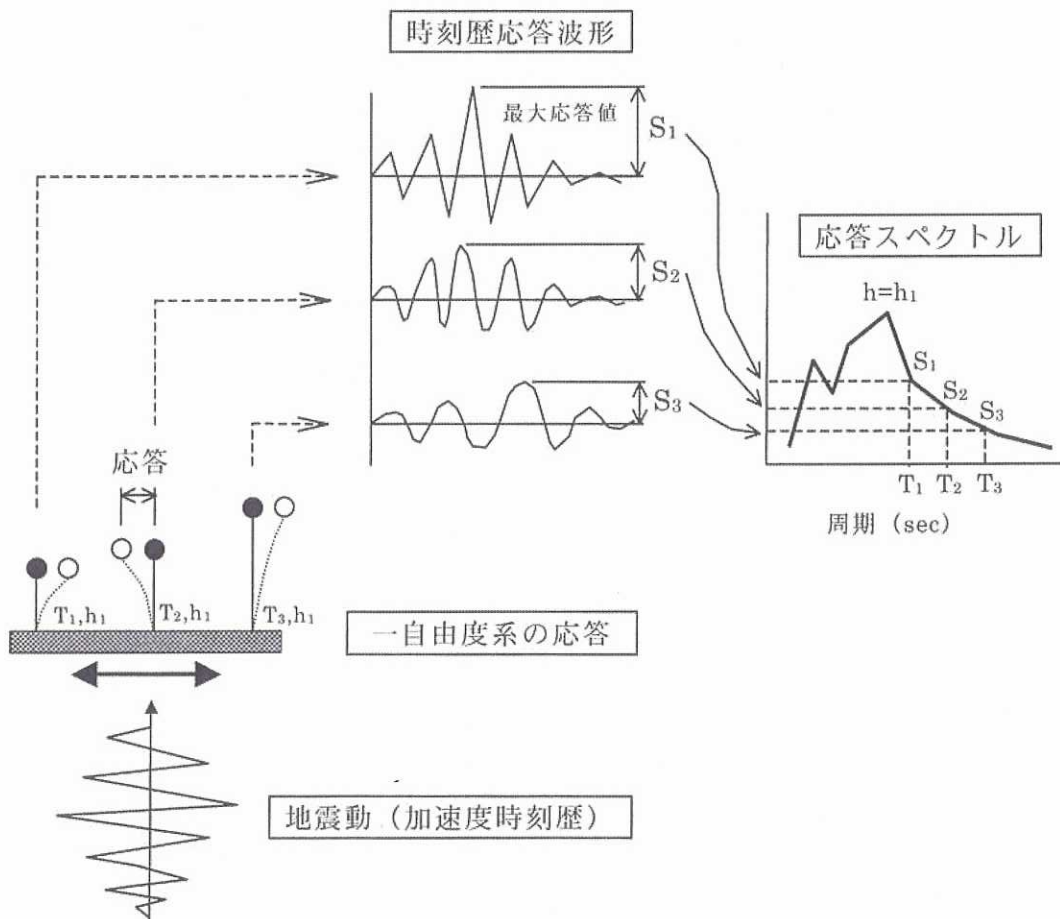
1. 応答スペクトルの概念

地震工学の分野では、地震動が構造物に及ぼす影響度を表すための指標として、「応答スペクトル」という概念がしばしば用いられる。

地震動が構造物に与える影響度を調べるものなので、地震動自体の性質と構造物の性質の両者に依存することになる。構造物の影響といっても、地震動に伴う振動の大きさを問題にするので、構造物の振動に関して本質的なパラメータを選ぶ必要がある。構造物の振動を左右する重要なパラメータは、構造物の固有周期と減衰値であるので、応答スペクトルとは、この2つのパラメータによって、与えられた地震動がどのような応答値（変位、速度、加速度）になるかを示すものであるといえる。

大崎（1983）によれば、参図 11 の考え方によって、応答スペクトルの概念を説明している。

参図 11 に示すように、ある地震動（加速度時刻歴）が与えられた場合に、減衰を固定し、固有周期を変えた一自由度系の地震応答計算を実施し、その最大応答値を固有周期を横軸にしてプロットしたものが、応答スペクトルである。最大応答値に、変位、速度あるいは加速度を用いるかどうかによって、それぞれ変位応答スペクトル、速度応答スペクトルおよび加速度応答スペクトルと呼ばれている。



参図 11 応答スペクトルの概念（大崎(1983)を修正）

2. 一自由度系の振動（正弦波加震）

2. 1 一自由度系の運動方程式

応答スペクトルを求めるには、1 自由度系の応答計算が必要になるので、1 自由度系の振動に関して説明する。

参図 12 に示すように、1 質点系の振動モデルを考え、地震動の変位 $y(t)$ が作用したときの応答を計算してみる。なお、質点に作用する減衰力は、質点の相対速度に比例するものとする（比例定数 c を減衰係数と呼ぶ）。

質点 m に関する運動方程式（動的釣り合い式）は、慣性力 $-m(\ddot{x} + \ddot{y})$ 、ばね反力 $-kx$ およびダッシュポット反力 $-c\dot{x}$ の 3 つの力の釣り合いになるから、

$$-m(\ddot{x} + \ddot{y}) - c\dot{x} - kx = 0 \quad (1)$$

ここに、上付きのドットは、時間に関する微分を表す。ドット 1 つは、1 階時間微分を、ドット 2 つは 2 階時間微分を表す。

したがって、

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{y} \quad (2)$$

すなわち、

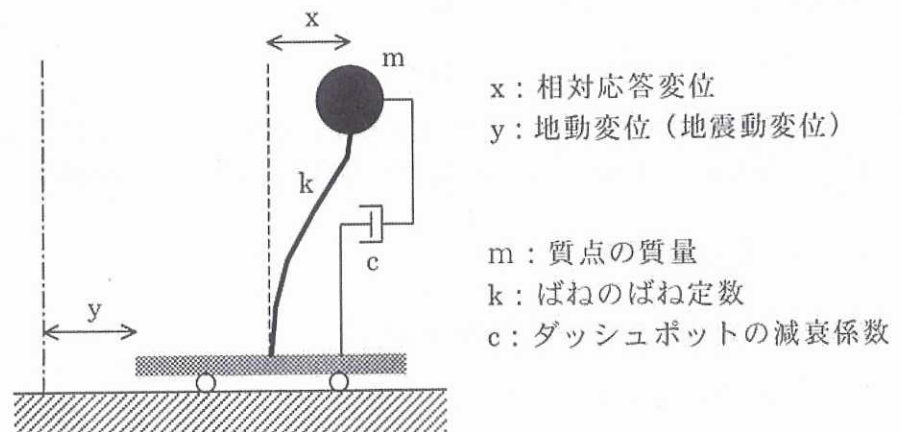
$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = -\ddot{y} \quad (3)$$

ここで、

$$\frac{c}{m} = 2h\omega_n, \quad \frac{k}{m} = \omega_n^2 \quad (4)$$

とおけば、次式を得る。

$$\ddot{x} + 2h\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = -\ddot{y} \quad (5)$$



参図 12 1 自由度系の振動モデル

式(5)において、 ω_n は固有円振動数、 h は減衰定数 と呼ばれるのものである。式(3)と式(5)を比べると、数学的には、減衰に関するパラメータを c の代わりに h を使い、 k/m の代わりに ω_n を用いたものと考えることができる。

ω_n が固有振動数と呼ばれる所以は、式(5)において、減衰がゼロ、入力が無い自由振動を考えたとき、

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (6)$$

すなわち、

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_n^2 x = 0 \quad (7)$$

となり、式(7)は、相対変位応答 x が、単振動の方程式を満足することを意味するので、 x が固有円振動数 ω_n を有する振動になるからである。

また、 h は減衰定数あるいは臨界減衰比と呼ばれるものであるが、式(5)において、入力が無い減衰自由振動を考えたとき、

$$\ddot{x} + 2h\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (8)$$

となり、式(8)は、 $h < 1$ のとき相対変位応答 x が振動的な性状を示すが、 $h > 1$ のときには、ばねの復元力に比べて、減衰力が強く振動的性状にならない（過減衰）ことが示される。また、 $h < 1$ のときの減衰振動の波形は、振幅が時間とともに次第に小さくなってゆくが、 h の値が大きいほど振幅が小さくなるスピードが速くなる。

通常、 h の値は、小数あるいは%値で、0.05 あるいは 5% というように表現される。ひずみが小さい範囲では、鉄の場合で 2~3%、コンクリートや土の場合で 5% 程度の値をとると言われている。

次に、入力加速度（地動加速度）が、正弦波で表されるような場合を考える。

いま、入力加速度 $\ddot{y} = a \sin \omega t$ と仮定する。ここに、 a は入力加速度振幅、 ω は入力の円振動数である。このとき、式(5)は、

$$\ddot{x} + 2h\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = -a \sin \omega t \quad (9)$$

式(9)は、時間に関する 2 階常微分方程式であるが、一般に、右辺をゼロとした同次方程式の一般解に、非同時方程式の特解を加えたものが、一般解になることが知られている。

2. 2 減衰自由振動

まず、式(9)の右辺がゼロ（同次方程式）

$$\ddot{x} + 2h\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (10)$$

の一般解を求める。

式(10)の型の微分方程式は、 e^{pt} なる形の 2 個の独立な解を持ち、その線形結合で表される。 $x = Ce^{pt}$ なる解を仮定し、式(10)に代入すれば、

$$p^2 e^{pt} + 2h\omega_n p e^{pt} + \omega_n^2 e^{pt} = 0 \quad (11)$$

すなわち、

$$e^{pt}(p^2 + 2h\omega_n p + \omega_n^2) = 0$$

より、

$$p^2 + 2h\omega_n p + \omega_n^2 = 0 \quad (12)$$

式(12)を解けば、

$$p = -h\omega_n \pm \omega_n \sqrt{h^2 - 1} \quad (13)$$

式(13)によれば、 $h > 1$ のとき p は実数値となり、 $h < 1$ のとき p は複素数になることがわかる。解の形は、 $x = Ce^{pt}$ なので、 $h > 1$ のときの解が指数関数となり、 $h < 1$ のときの解が三角関数になることを示している。

この物理的意味としては、 h が 1 よりも大きいと振動的性状を示さないが、 h が 1 より小さいと振動的性状を示すことを意味している。以下では、振動的性状を示す $h < 1$ の場合を取り上げることとする。

$h < 1$ のとき、式(13)の根号内は負となるので、

$$p = -h\omega_n \pm i\omega_n \sqrt{1 - h^2} \quad (14)$$

したがって、式(10)の一般解は、

$$x = e^{-h\omega_n t} (C_1 e^{i\sqrt{1-h^2}\omega_n t} + C_2 e^{-i\sqrt{1-h^2}\omega_n t}) \quad (15)$$

オイラーの関係式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いると、

$$\begin{aligned} x &= e^{-h\omega_n t} \left\{ C_1 (\cos\sqrt{1-h^2}\omega_n t + i\sin\sqrt{1-h^2}\omega_n t) + C_2 (\cos\sqrt{1-h^2}\omega_n t - i\sin\sqrt{1-h^2}\omega_n t) \right\} \\ &= e^{-h\omega_n t} \left\{ (C_1 + C_2) \cos\sqrt{1-h^2}\omega_n t + i(C_1 - C_2) \sin\sqrt{1-h^2}\omega_n t \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、

$$A = C_1 + C_2, \quad B = i(C_1 - C_2)$$

と置けば (A および B が実数になるために C_1 と C_2 が共役複素数 ($x+iy$ と $x-iy$ のような関係) でなければならない)、

$$x = e^{-h\omega_n t} (A \cos\sqrt{1-h^2}\omega_n t + B \sin\sqrt{1-h^2}\omega_n t) \quad (17)$$

ここに、A および B は、初期条件によって定まる積分定数である。

初期条件として、初期変位 x_0 、初速度 \dot{x}_0 としたときの解を求める。

式(17)より、

$$\dot{x} = \omega_n e^{-h\omega_n t} \left\{ (-hA + \sqrt{1-h^2}B) \cos\sqrt{1-h^2}\omega_n t - (\sqrt{1-h^2}A + hB) \sin\sqrt{1-h^2}\omega_n t \right\} \quad (18)$$

式(17)で、 $t=0$ として、

$$x_0 = A \quad (19)$$

式(18)で、 $t=0$ として、

$$\dot{x}_0 = \omega_n(-hA + \sqrt{1-h^2}B) \quad (20)$$

式(19)および(20)より、

$$\begin{aligned} A &= x_0 \\ B &= \frac{hx_0 + \dot{x}_0/\omega_n}{\sqrt{1-h^2}} \end{aligned} \quad (21)$$

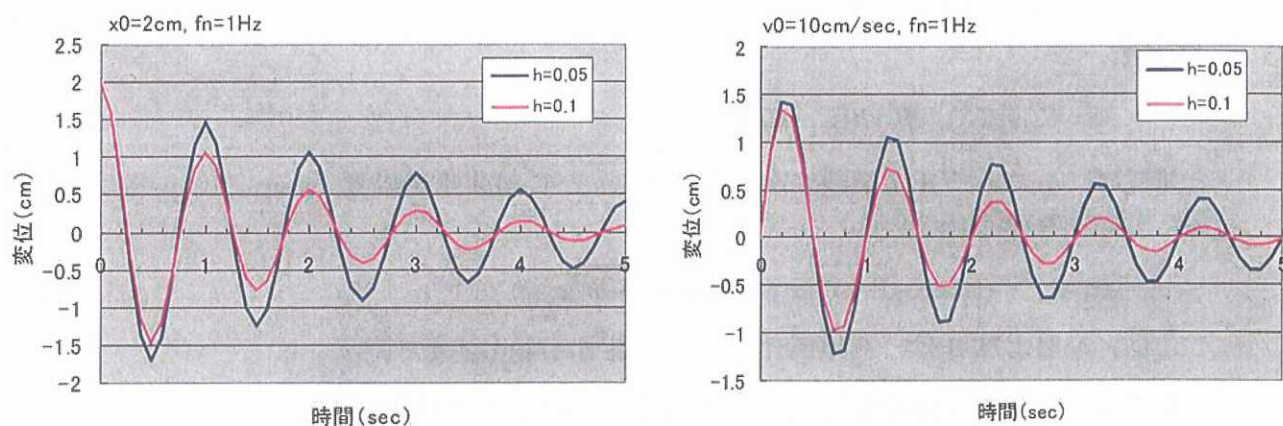
式(17)および(21)より、

$$x = e^{-h\omega_n t} \left(x_0 \cos \sqrt{1-h^2} \omega_n t + \frac{hx_0 + \dot{x}_0/\omega_n}{\sqrt{1-h^2}} \sin \sqrt{1-h^2} \omega_n t \right) \quad (22)$$

式(22)が、1自由度系の減衰自由振動の解（変位応答）である。

式(22)を用い、初期変位のみ、あるいは初期速度のみ与えた場合の変位波形を求めてみる。

参図 12 に、計算結果を示す。振動系の固有振動数は、1Hz ($\omega_n=6.28\text{rad/sec}$)、減衰定数は5%と10%の2種とした。振動波形の山と山の時間が、ほぼ1秒であること、減衰が大きいほど振幅が小さくなるスピードが速いことがわかる。



(a)初期変位を与えた場合

(b)初期速度を与えた場合

参図 12 1自由度系の減衰振動の変位波形

2. 2 強制振動

式(9)の解を求めるために、式(9)の非同次方程式の特解を求める。

式(9)の特解として、

$$x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t \quad (23)$$

を仮定する。式(23)より、

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega(C_1 \cos \omega t - C_2 \sin \omega t) \\ \ddot{x} &= -\omega^2(C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t) \end{aligned} \quad (24)$$

式(23)および式(24)を、式(9)に代入して、

$$-\omega^2(C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t) + 2h\omega_n\omega(C_1 \cos \omega t - C_2 \sin \omega t) + \omega_n^2(C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t) = -a \sin \omega t \quad (25)$$

すなわち、

$$(-\omega^2 C_1 - 2h\omega_n\omega C_2 + \omega_n^2 C_1 + a) \sin \omega t + (-\omega^2 C_2 + 2h\omega_n\omega C_1 + \omega_n^2 C_2) \cos \omega t = 0 \quad (26)$$

式(26)は、すべての t に対して成立する必要があるから、次式が成り立たなければならない。

$$\begin{aligned} (\omega_n^2 - \omega^2)C_1 - 2h\omega_n\omega C_2 &= -a \\ 2h\omega_n\omega C_1 + (\omega_n^2 - \omega^2)C_2 &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

式(27)を解けば、

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{\omega_n^2 - \omega^2}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2h\omega_n\omega)^2} a \\ C_2 &= \frac{2h\omega_n\omega}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2h\omega_n\omega)^2} a \end{aligned} \quad (28)$$

式(28)を式(23)に代入すれば、

$$\begin{aligned} x &= -\frac{a}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2h\omega_n\omega)^2} \left((\omega_n^2 - \omega^2) \sin \omega t - 2h\omega_n\omega \cos \omega t \right) \\ &= -a \cdot \frac{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2h\omega_n\omega)^2}}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2h\omega_n\omega)^2} \sin(\omega t - \phi) \\ &= -a \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2h\omega_n\omega)^2}} \sin(\omega t - \phi) \\ &= -\frac{a}{\omega_n^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - (\omega/\omega_n)^2\right)^2 + (2h(\omega/\omega_n))^2}} \sin(\omega t - \phi) \\ &= -\frac{ma}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 - (\omega/\omega_n)^2\right)^2 + (2h(\omega/\omega_n))^2}} \sin(\omega t - \phi) \end{aligned} \quad (29)$$

ここに、

$$\begin{aligned}\phi &= \arctan \left| \frac{2h\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \right| \\ &= \arctan \frac{2h(\omega/\omega_n)}{|1 - (\omega/\omega_n)^2|}\end{aligned}\quad (30)$$

以上より、式(9)の解は、式(17)と式(29)から、

$$\begin{aligned}x &= e^{-h\omega_n t} (A \cos \sqrt{1-h^2}\omega_n t + B \sin \sqrt{1-h^2}\omega_n t) \\ &\quad - \frac{ma}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2h(\omega/\omega_n))^2}} \sin(\omega t - \phi)\end{aligned}\quad (31)$$

ここに、A および B は、初期条件によって定まる積分定数である。

A および B を定めるために、振動が静止状態から始まるものと仮定し、初期条件として $t=0$ において、変位ゼロ、速度ゼロの条件を考慮する。

式(31)より、

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \omega_n e^{-h\omega_n t} \left\{ -hA + \sqrt{1-h^2}B \right\} \cos \sqrt{1-h^2}\omega_n t - \left\{ \sqrt{1-h^2}A + hB \right\} \sin \sqrt{1-h^2}\omega_n t \\ &\quad - \frac{ma}{k} \cdot \frac{\omega}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2h(\omega/\omega_n))^2}} \cos(\omega t - \phi)\end{aligned}\quad (32)$$

式(31)より、 $t=0$ で変位ゼロの条件から、

$$A + \frac{ma}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2h(\omega/\omega_n))^2}} \sin \phi = 0\quad (33)$$

式(32)より、 $t=0$ で速度ゼロの条件から、

$$\omega_n (-hA + \sqrt{1-h^2}B) - \frac{ma}{k} \cdot \frac{\omega}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2h(\omega/\omega_n))^2}} \cos \phi = 0\quad (34)$$

式(30)と式(33)より、

$$A = -\frac{ma}{k} \cdot \frac{2h(\omega/\omega_n)}{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2h(\omega/\omega_n))^2}\quad (35)$$

式(30)と式(33)より、

$$\begin{aligned}B &= \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-h^2}} \left(-\frac{ma}{k} \cdot \frac{2h^2\omega}{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2h(\omega/\omega_n))^2} + \frac{ma}{k} \cdot \frac{\omega(1 - (\omega/\omega_n)^2)}{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2h(\omega/\omega_n))^2} \right) \\ &= \frac{ma}{k} \cdot \frac{\omega/\omega_n}{\sqrt{1-h^2}} \cdot \frac{1 - (\omega/\omega_n)^2 - 2h^2}{(1 - (\omega/\omega_n)^2)^2 + (2h(\omega/\omega_n))^2}\end{aligned}\quad (36)$$

以上で、積分定数 A および B が決定したので、静止状態から始まる正弦波加震の強制振動解は、式(31)、式(35)および式(36)によって算定できる。

式(32)によれば、固有円振動数 ω_n の関数として表される項と、加震の円振動数 ω の関数として表される項の2つからなっていることがわかる。前者は、固有振動数で振動する成分なので、初期条件に依存する自由振動を表し、後者は、外力（加震）の振動数で振動す

る成分なので、加震条件に依存する強制振動を表しているものと解釈できる。

また、自由振動項には、指数関数の項があるため、時間とともに振幅が減衰する。しか
がって、ある時間を経過した後は、強制振動項のみが振動に寄与するものと考えられる。
すなわち、自由振動項は、初期条件に依存する過渡振動を表している。

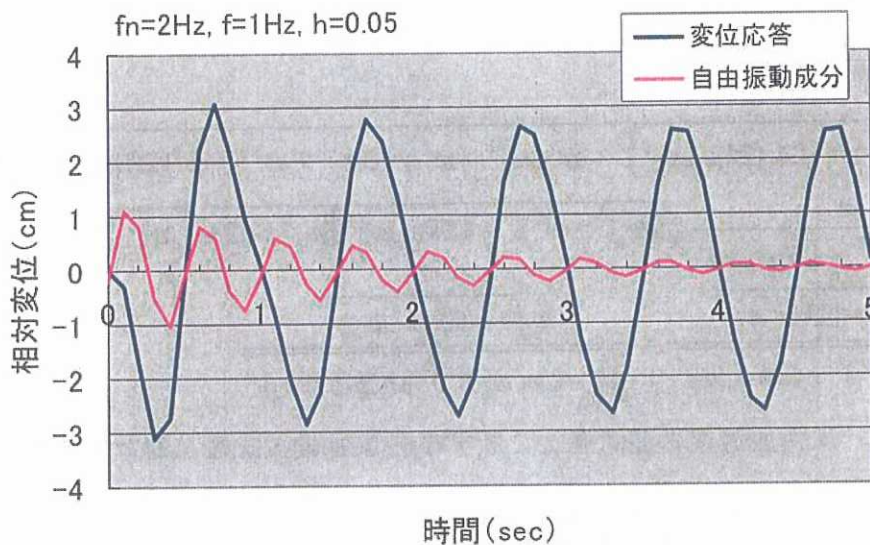
次に、強制振動項をみると、応答振幅は、 $ma/k, \omega/\omega_n$ および h に依存することがわかる。

これは、入力最大の加速度 a に対する慣性力 ma が作用したときの静的変位 ma/k 、固有振
動数に対する外力の振動数の比（振動数比）および減衰定数に依存することを示すもので
ある。ただし、線形振動であるため、静的変位 ma/k に比例して変位応答 x が定まること
になる。さらに、強制振動項の位相をみると、入力の位相に対して ϕ だけ、位相ずれを示
すことがわかる。この ϕ は、振動数比と減衰定数に依存している。

以下では、式(31)、式(35)および式(36)を用いて、応答変位波形を計算してみる。

参図 13 に、計算結果を示す。固有振動数 2Hz、外力（地震動）の振動数 1Hz、減衰定数
5%とした。なお、 ma/k は、2cm とした。参図 13 には、式(31)で示される相対変位応答（自
由振動成分と強制振動成分の和）と自由振動成分のみの波形を示した。

参図 13 によれば、相対変位応答は、2~3 波で定常状態になることがわかる。これは、
自由振動成分が、時間とともに減衰することで、強制振動波形が優勢になるためである。



参図 13 1 自由度系の強制振動による変位波形

上記での議論から、強制振動における自由振動項は、減衰するので、以下では強制振動

項について検討を行う。

式(31)から、強制振動項の振幅に着目すると、

$$\left| \frac{x_{\max}}{x_{st}} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\omega / \omega_n)^2)^2 + (2h(\omega / \omega_n))^2}} \quad (37)$$

ここに、 $x_{st} = ma/k$ である。

式(37)は、慣性力 ma が作用したときの静的変位 x_{st} に対する動的最大変位（相対変位）の比を示している。

次に、式(29)を用いて、加速度（相対加速度）を算定すると、

$$\ddot{x} = \frac{a\omega^2}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2h\omega_n\omega)^2} \left((\omega_n^2 - \omega^2) \sin \omega t - 2h\omega_n\omega \cos \omega t \right) \quad (38)$$

地動加速度 $\ddot{y} = a \sin \omega t$ を加えて、絶対加速度を求めると、

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \ddot{y} &= \frac{a\omega^2}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2h\omega_n\omega)^2} \left((\omega_n^2 - \omega^2) \sin \omega t - 2h\omega_n\omega \cos \omega t \right) + a \sin \omega t \\ &= \frac{a}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2h\omega_n\omega)^2} \left[\left\{ (\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2h\omega_n\omega)^2 + \omega^2(\omega_n^2 - \omega^2) \right\} \sin \omega t - 2h\omega_n\omega^3 \cos \omega t \right] \end{aligned} \quad (39)$$

式(39)から、振幅 $(\ddot{x} + \ddot{y})_{\max}$ を計算すれば、

$$\begin{aligned} (\ddot{x} + \ddot{y})_{\max} &= \frac{a}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2h\omega_n\omega)^2} \sqrt{\left\{ (\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2h\omega_n\omega)^2 + \omega^2(\omega_n^2 - \omega^2) \right\}^2 + (2h\omega_n\omega^3)^2} \\ &= \frac{a}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2h\omega_n\omega)^2} \\ &\quad \times \sqrt{\left\{ (\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2h\omega_n\omega)^2 \right\}^2 + \omega^2(\omega_n^2 - \omega^2)^2(2\omega_n^2 - \omega^2) + \omega^2(2h\omega_n\omega)^2(2\omega_n^2 - \omega^2)} \\ &= \frac{a}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2h\omega_n\omega)^2} \sqrt{\left\{ (\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2h\omega_n\omega)^2 \right\} \left\{ \omega_n^4 + (2h\omega_n\omega)^2 \right\}} \quad (40) \\ &= \frac{a\sqrt{\omega_n^4 + (2h\omega_n\omega)^2}}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2h\omega_n\omega)^2}} = \frac{a\sqrt{1 + (2h\omega / \omega_n)^2}}{\sqrt{(1 - (\omega / \omega_n)^2)^2 + (2h\omega / \omega_n)^2}} \end{aligned}$$

式(40)より、入力加速度の最大値 a に対する応答加速度振幅（絶対加速度）の比をとれば、

$$\frac{(\ddot{x} + \ddot{y})_{\max}}{a} = \sqrt{\frac{1 + (2h\omega / \omega_n)^2}{(1 - (\omega / \omega_n)^2)^2 + (2h\omega / \omega_n)^2}} \quad (41)$$

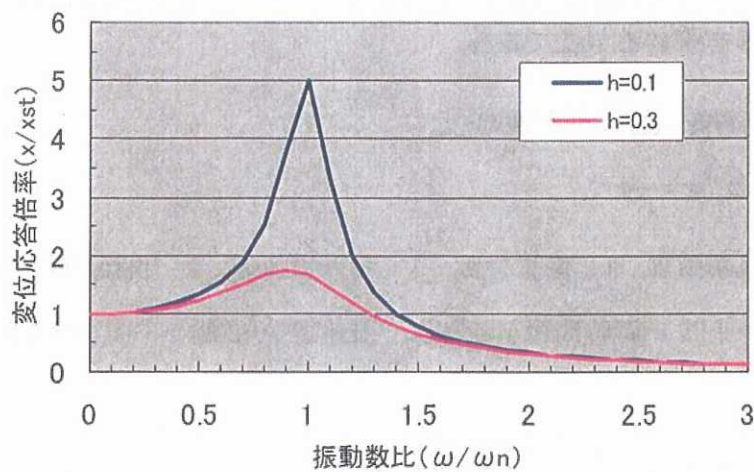
式(41)は、入力加速度に対する 1 自由度系の応答加速度の比であり、加速度応答倍率と呼ばれる。

式(37)と式(41)を用いて、変位応答と加速度応答をグラフ化してみる。いずれも、振動数

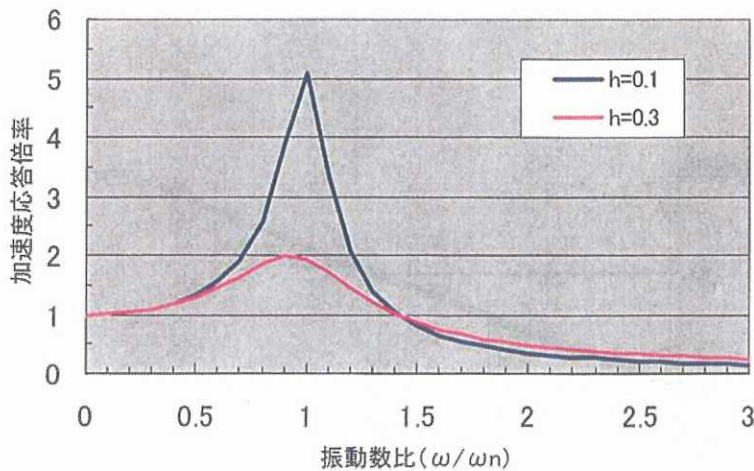
比 (ω/ω_n) と減衰定数 (h) の関数になっているので、 h をパラメータとして、 ω/ω_n を横軸にして示す。

参図 14 に、変位応答倍率 (慣性力が静的に作用したときの変位に対する動的な相対変位の比) と加速度応答倍率 (入力加速度に対する応答加速度の比) を示す。

図によれば、振動数比が 1 のとき、応答が大きくなること (共振時)、また減衰が大きいほど応答が抑えられることがわかる。変位応答倍率と加速度応答倍率で、傾向はほぼ一致しているが、振動数比が大きいところにおいて、減衰の差異が応答に及ぼす影響が逆になる傾向がある。



(a)変位応答倍率



(b)加速度応答倍率

参図 14 変位応答倍率と加速度応答倍率

3. 一自由度系の振動 (地震波加震: 二ガム法)

前項では、1自由度系を正弦波加震させたときの応答計算について述べた。

以下では、1自由度系が地震波加震を受けるときの応答計算法について説明する。ここでは、応答スペクトル計算にも、しばしば用いられるニガム（Nigam）法と呼ばれる方法を紹介する。

一般に、地震波データというのは、ある時間間隔ごとにデジタルデータで与えられていることが多い。例えば、1つのデータについて、加速度の強震記録が、0.01秒ごとに数千個与えられるということである。データがデジタル値であるため、データは飛び飛びの値として与えられるので、データ間には記録は存在しないことになる。

そこで、ニガム法というのは、飛び飛びの入力加速度値のデータ間は、直線的に変化すると仮定し、1自由度系の運動方程式の理論解を求め、現ステップの変位と速度および現ステップと次ステップの入力加速度値から、次ステップの変位と速度を算定する漸化式に帰着させて応答波形を求める方法である。

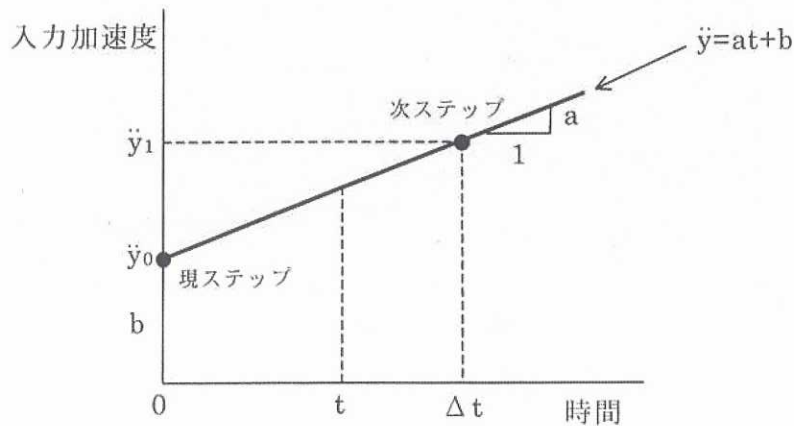
1自由度系の運動方程式を、再度書けば、

$$\ddot{x} + 2h\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = -\ddot{y} \quad (42)$$

ここに、 ω_n : 固有円振動数、 h : 減衰定数、 \ddot{y} : 入力加速度、 x : 相対変位 である。また、上付きの1個のドットは1階時間微分を表し、上付きの2個のドットは2階時間微分を表している。

入力加速度 \ddot{y} を、参図 15 のように仮定すれば、

$$\ddot{y} = at + b \quad (43)$$



参図 15 入力加速度値の変化

式(43)のように、入力加速度を仮定すれば、現ステップの入力加速度 \ddot{y}_0 と次ステップの入力加速度 \ddot{y}_1 を用いて、以下の関係がある。

$$\begin{aligned} a &= \frac{\ddot{y}_1 - \ddot{y}_0}{\Delta t} \\ b &= \ddot{y}_0 \end{aligned} \quad (44)$$

以下では、式(43)を仮定したとき、式(42)の理論解を求める。式(42)の解は、先に述べたように、右辺をゼロとした同次方程式の一般解と、元の非同次方程式の特解の和で表すことができる。

そこで、式(42)の特解を求めるために、解の形として、

$$x = C_1 t + C_2 \quad (45)$$

を仮定する。

式(45)を式(42)に代入すれば、

$$\omega_n^2 C_1 t + \omega_n^2 C_2 + 2h\omega_n C_1 = -at - b \quad (46)$$

式(46)が、全ての t に対して成立するためには、次式が成り立つ必要がある。

$$\begin{aligned} \omega_n^2 C_1 &= -a \\ 2h\omega_n C_1 + \omega_n^2 C_2 &= -b \end{aligned} \quad (47)$$

式(47)を解けば、

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{a}{\omega_n^2} \\ C_2 &= \frac{1}{\omega_n^3} (2ha - b\omega_n) \end{aligned} \quad (48)$$

したがって、式(42)の特解は、

$$x = -\frac{a}{\omega_n^2} t + \frac{1}{\omega_n^3} (2ha - b\omega_n) \quad (49)$$

以上より、式(42)の一般解は、式(49)に同次方程式の一般解を加えて、次式で表すことができる。

$$x(t) = e^{-h\omega_n t} (A \sin \omega_d t + B \cos \omega_d t) - \frac{a}{\omega_n^2} t + \frac{1}{\omega_n^3} (2ha - b\omega_n) \quad (50)$$

ここに、 A および B は、初期条件で定まる積分定数である。また、 $\omega_d (= \omega_n \sqrt{1-h^2})$ は減衰固有円振動数である。

式(50)の積分定数を定めるために、 $t=0$ での初期条件、 $x(0) = x_0$ および $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ を仮定する。

式(50)より、

$$\dot{x}(t) = -h\omega_n e^{-h\omega_n t} \{(-h\omega_n A - \omega_d B) \sin \omega_d t + (\omega_d A - h\omega_n B) \cos \omega_d t\} - \frac{a}{\omega_n^2} \quad (51)$$

式(51)および式(50)における $t=0$ の条件から、

$$B + \frac{1}{\omega_n^3} (2ha - b\omega_n) = x_0 \quad (52)$$

$$\omega_d A - h\omega_n B - \frac{a}{\omega_n^2} = \dot{x}_0$$

式(52)を解けば、

$$A = \frac{\dot{x}_0}{\omega_d} + \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} x_0 + \frac{1}{\omega_n^3} \frac{1-2h^2}{\sqrt{1-h^2}} a + \frac{1}{\omega_n^2} \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} b \quad (53)$$

$$B = x_0 - \frac{2h}{\omega_n^3} a + \frac{1}{\omega_n^2} b$$

式(53)を、式(50)に代入すれば、

$$x(t) = e^{-h\omega_n t} \left[\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_d} + \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} x_0 + \frac{1}{\omega_n^3} \frac{1-2h^2}{\sqrt{1-h^2}} a + \frac{1}{\omega_n^2} \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} b \right) \sin \omega_d t \right. \\ \left. + \left(x_0 - \frac{2h}{\omega_n^3} a + \frac{1}{\omega_n^2} b \right) \cos \omega_d t \right] \\ - \frac{a}{\omega_n^2} t + \frac{2h}{\omega_n^3} a - \frac{1}{\omega_n^2} b \quad (54)$$

式(54)における a および b に式(44)を代入し、 $t = \Delta t$ における応答値を求め、さらに、 $x_0, \dot{x}_0, \ddot{y}_0$ および \ddot{y}_1 の項で整理すれば、次式を得る。

$$x(\Delta t) = e^{-h\omega_n \Delta t} \left(\frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega_d \Delta t + \cos \omega_d \Delta t \right) \cdot x_0 \\ + e^{-h\omega_n \Delta t} \frac{\sin \omega_d \Delta t}{\omega_d} \cdot \dot{x}_0 \\ + \frac{\ddot{y}_0}{\omega_n^3 \Delta t} \left[e^{-h\omega_n \Delta t} \left\{ \frac{2h^2 - 1 + h\omega_n \Delta t}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega_d \Delta t + (2h + \omega_n \Delta t) \cos \omega_d \Delta t \right\} - 2h \right] \\ + \frac{\ddot{y}_1}{\omega_n^3 \Delta t} \left[-e^{-h\omega_n \Delta t} \left\{ \frac{2h^2 - 1}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega_d \Delta t + 2h \cos \omega_d \Delta t \right\} + 2h - \omega_n \Delta t \right] \quad (55)$$

次に、式(51)に式(53)を代入すれば、式(56)を得る。

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= e^{-h\omega_n t} \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -h\omega_n \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_d} + \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} x_0 + \frac{1}{\omega_n^3} \frac{1-2h^2}{\sqrt{1-h^2}} a + \frac{1}{\omega_n^2} \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} b \right) \\ -\omega_d \left(x_0 - \frac{2h}{\omega_n^3} a + \frac{1}{\omega_n^2} b \right) \end{array} \right\} \sin \omega_d t \\ + \left\{ \begin{array}{l} \omega_d \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_d} + \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} x_0 + \frac{1}{\omega_n^3} \frac{1-2h^2}{\sqrt{1-h^2}} a + \frac{1}{\omega_n^2} \frac{h}{\sqrt{1-h^2}} b \right) \\ -h\omega_n \left(x_0 - \frac{2h}{\omega_n^3} a + \frac{1}{\omega_n^2} b \right) \end{array} \right\} \cos \omega_d t \end{array} \right] \\
&\quad - \frac{1}{\omega_n^2} a \\
&= -e^{-h\omega_n t} \frac{\omega_n}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega_d t \cdot x_0 \\
&\quad + e^{-h\omega_n t} \left(-\frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t \right) \cdot \dot{x}_0 \\
&\quad + \frac{a}{\omega_n^2} \left\{ e^{-h\omega_n t} \left(\frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega_d t + \cos \omega_d t \right) - 1 \right\} \\
&\quad - \frac{b}{\omega_n} e^{-h\omega_n t} \frac{1}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega_d t
\end{aligned} \tag{56}$$

式(56)における a および b に式(44)を代入し、 $t = \Delta t$ における応答値を求め、さらに、 $x_0, \dot{x}_0, \ddot{y}_0$ および \ddot{y}_1 の項で整理すれば、次式を得る。

$$\begin{aligned}
\dot{x}(\Delta t) &= -e^{-h\omega_n \Delta t} \frac{\omega_n}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega_d \Delta t \cdot x_0 \\
&\quad + e^{-h\omega_n \Delta t} \left(-\frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega_d \Delta t + \cos \omega_d \Delta t \right) \cdot \dot{x}_0 \\
&\quad + \frac{\ddot{y}_0}{\omega_n^2 \Delta t} \left[-e^{-h\omega_n \Delta t} \left(\frac{h + \omega_n \Delta t}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega_d \Delta t + \cos \omega_d \Delta t \right) + 1 \right] \\
&\quad + \frac{\ddot{y}_1}{\omega_n^2 \Delta t} \left[e^{-h\omega_n \Delta t} \left(\frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega_d \Delta t + \cos \omega_d \Delta t \right) - 1 \right]
\end{aligned} \tag{57}$$

式(55)および(57)を用いると、現ステップの変位と速度から、次ステップの変位と速度を算定するための漸化式として、式(58)を得ることができる。

$$\begin{Bmatrix} x(\Delta t) \\ \dot{x}(\Delta t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_0 \\ \ddot{y}_1 \end{Bmatrix} \tag{58}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
A_{11} &= e^{-h\omega_n\Delta t} \left(\frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega_d \Delta t + \cos \omega_d \Delta t \right) \\
A_{12} &= e^{-h\omega_n\Delta t} \frac{\sin \omega_d \Delta t}{\omega_d} \\
A_{21} &= -e^{-h\omega_n\Delta t} \frac{\omega_n}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega_d \Delta t \\
A_{22} &= e^{-h\omega_n\Delta t} \left(-\frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega_d \Delta t + \cos \omega_d \Delta t \right) \\
B_{11} &= \frac{1}{\omega_n^3 \Delta t} \left[e^{-h\omega_n\Delta t} \left\{ \frac{2h^2 - 1 + h\omega_n\Delta t}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega_d \Delta t + (2h + \omega_n\Delta t) \cos \omega_d \Delta t \right\} - 2h \right] \\
B_{12} &= \frac{1}{\omega_n^3 \Delta t} \left[-e^{-h\omega_n\Delta t} \left\{ \frac{2h^2 - 1}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega_d \Delta t + 2h \cos \omega_d \Delta t \right\} + 2h - \omega_n\Delta t \right] \\
B_{21} &= \frac{1}{\omega_n^2 \Delta t} \left[-e^{-h\omega_n\Delta t} \left(\frac{h + \omega_n\Delta t}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega_d \Delta t + \cos \omega_d \Delta t \right) + 1 \right] \\
B_{22} &= \frac{1}{\omega_n^2 \Delta t} \left[e^{-h\omega_n\Delta t} \left(\frac{h}{\sqrt{1-h^2}} \sin \omega_d \Delta t + \cos \omega_d \Delta t \right) - 1 \right]
\end{aligned} \tag{59}$$

また、 $\omega_d = \sqrt{1-h^2} \omega_n$ 、 $\omega_n = \frac{2\pi}{T_n}$ 、 T_n ：固有周期、 h ：減衰定数、 Δt ：入力加速度波形の

時間きざみ、 \ddot{y}_0 ：現ステップの入力加速度、 \ddot{y}_1 ：次ステップの入力加速度、 x_0 ：現ステップの相対変位、 \dot{x}_0 ：現ステップの相対速度、 $x(\Delta t)$ ：次ステップの相対変位、 $\dot{x}(\Delta t)$ ：次ステップの相対速度である。

式(58)および(59)により、与えられた入力加速度波形に対して、現ステップの変位と速度から次ステップの変位と速度を算定することができる。式(58)を各時刻に逐次用いることで、変位および速度の応答波形を求めることが可能である。

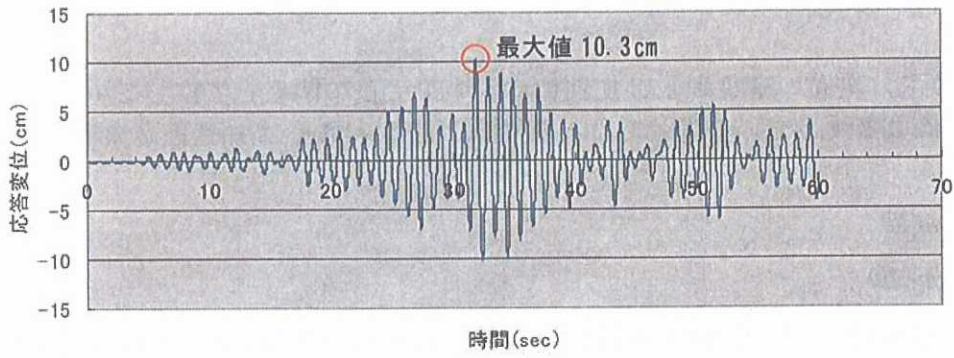
また、応答加速度波形（絶対加速度）については、運動方程式(42)を変形し、

$$\ddot{x} + \ddot{y} = -2h\omega_n \dot{x} - \omega_n^2 x \tag{60}$$

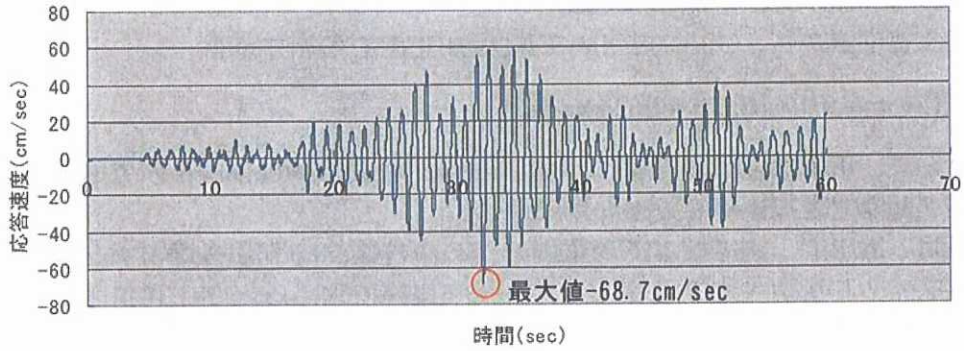
を用いて、応答速度と応答変位をもとに求めることができる。

応答スペクトルの計算では、減衰定数 h を固定し、ある固有周期 T_n に対する地震動波形（入力加速度）の応答計算を行って、その最大応答からスペクトル値を求め、同様の計算を固有周期を変えて実施すればよい。

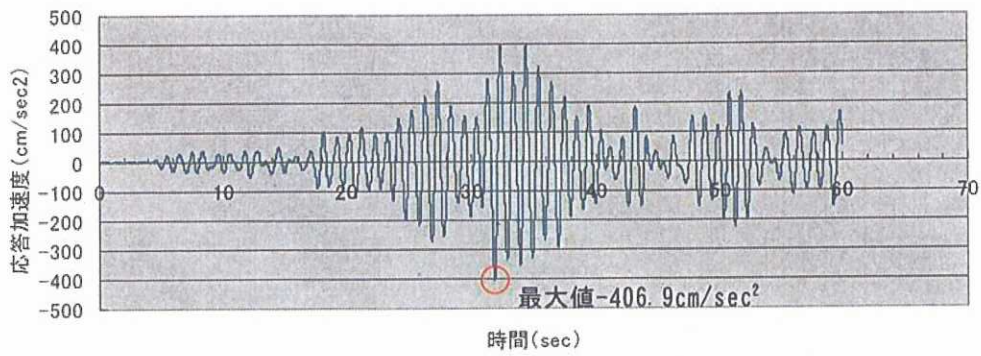
二ガム法を用いて、1自由度系の応答波形を求めた例を、参図 16 に示す。振動系の固有周期は 1sec、減衰定数は 5% とした。なお、同図には、入力加速度波形も示した。



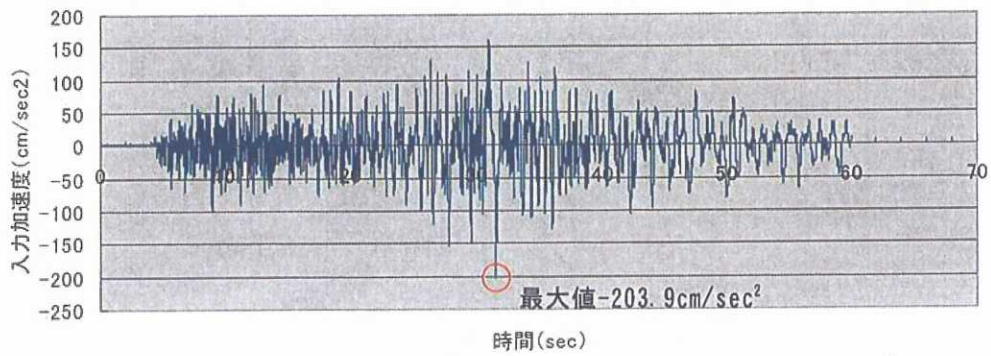
(a) 応答変位波形



(b) 応答速度波形



(c) 応答加速度波形



(d) 入力加速度波形

参図 16 地震波に対する応答波形

参図 16 から、変位、速度および加速度応答の最大値の関係を考察してみる。

正弦波で自由振動している場合には、変位 D 、速度 V および加速度 A の間には、以下の関係がある。

$$\begin{aligned} V &= \omega_n D \\ A &= \omega_n^2 D \end{aligned} \tag{61}$$

一般に、式(61)は、不規則な地震動の最大値には適用できないが、固有振動が卓越する場合には近似的に適用できる。参図 16 の応答波形で確かめてみる。

最大変位値から、式(61)を用いて最大速度を予測すれば、

$$V = 2 \times \pi / 1.0 \times 10.3 = 64.7 \text{ cm/sec}$$

また、最大変位値から、式(61)を用いて最大加速度を予測すれば、

$$A = (2 \times \pi / 1.0)^2 \times 10.3 = 406.2 \text{ cm/sec}^2$$

これに対して、正確な最大応答値は、68.7cm/sec および 406.9cm/sec² であるから、10% 以内の誤差で近似できていることがわかる。

この関係は、加速度、速度および変位の 3 つの応答スペクトルを算定する際に、どれか一つの応答スペクトルから他の応答スペクトルを概算で求めるときに利用される。

参考資料 2-2 地盤の自由振動解について

式(2-3)で示される地盤震動の方程式の自由振動解を求める。

式(2-3)において、減衰ゼロすなわち $\eta=0$ とし、右辺の入力加速度をゼロとすれば、

$$\frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} - G \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = 0 \quad (62)$$

時間的に正弦的な振動を仮定し、

$$u(z,t) = U(z)e^{i\omega t} \quad (63)$$

と置く。式(63)を式(62)に代入すれば、

$$-\omega^2 \frac{\gamma}{g} U(z)e^{i\omega t} - G \frac{d^2 U(z)}{dz^2} = 0 \quad (64)$$

ここで、せん断弾性係数とせん断波速度の関係 $G = \frac{\gamma}{g} V_s^2$ (V_s : 地盤のせん断波速度) を

用いると、次式を得る。

$$\frac{d^2 U(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2}{V_s^2} U(z) = 0 \quad (65)$$

式(65)が、地盤の自由振動モードに関する方程式になる。

式(65)の一般解は、

$$U(z) = C_1 \sin\left(\frac{\omega}{V_s} z\right) + C_2 \cos\left(\frac{\omega}{V_s} z\right) \quad (66)$$

で表すことができる。ここに、 C_1 および C_2 は、境界条件によって決まる積分定数である。

したがって、せん断応力 τ は、

$$\tau = G \frac{dU(z)}{dz} = \frac{\omega}{V_s} \left(C_1 \cos\left(\frac{\omega}{V_s} z\right) - C_2 \sin\left(\frac{\omega}{V_s} z\right) \right) \quad (67)$$

ここで、基盤面上で相対変位がゼロ、すなわち、

$$U(0) = 0 \quad (68)$$

なる境界条件を考慮すれば、式(66)から、

$$C_2 = 0 \quad (69)$$

また、地表面上でせん断応力がゼロ、すなわち、 $z=H$ で $\tau=0$ なる境界条件を考慮すれば、式(67)と式(69)から、

$$C_1 \cos\left(\frac{\omega}{V_s} H\right) = 0 \quad (70)$$

式(70)で、 $C_1=0$ とならない (自明な解にならない) ためには、次式が成立する必要がある。

$$\cos\left(\frac{\omega}{V_s} H\right) = 0 \quad (71)$$

すなわち、

$$\frac{\omega}{V_s} H = (2j-1) \frac{\pi}{2} \quad (j=1,2,\dots) \quad (72)$$
$$\omega = (2j-1) \frac{\pi V_s}{2H}$$

式(72)は、円振動数 ω が、どんな値でも採り得るというのではなく、飛び飛びの値しか採れないことを示している。これは、地盤震動の固有円振動数であり、この ω を改めて ω_j と書けば、

$$\omega_j = (2j-1) \frac{\pi V_s}{2H} \quad (j=1,2,\dots) \quad (73)$$

したがって、変位モードは、式(66)、式(69)および式(73)より、

$$U(z) = C_1 \sin \left\{ \frac{(2j-1)\pi}{2H} z \right\} \quad (74)$$

【参考文献】

- 1)大崎順彦 (1983) : 振動理論、建築構造学大系 24、彰国社
- 2)小坪清真 (1977) : 土木振動学、森北出版

参考資料 3-1 表層地盤の加速度分布について

式(2-4)より、1次モードのみに着目すると、相対変位 $u(z,t)$ は、

$$u(z,t) = \phi_1(z)Q_1(t) \quad (1)$$

すなわち、相対加速度 $\ddot{u}(z,t)$ は、

$$\ddot{u}(z,t) = \phi_1(z)\ddot{Q}_1(t) \quad (2)$$

したがって、絶対加速度の最大値は、

$$\text{Max}_t \{ \ddot{u}(z,t) + \ddot{u}_g(t) \} = \text{Max}_t \{ \phi_1(z)\ddot{Q}_1(t) + \ddot{u}_g(t) \} \quad (3)$$

一方、時間関数 $Q_1(t)$ に関する運動方程式(2-11a)を書き下せば、

$$\frac{d^2 Q_1(t)}{dt^2} + 2h\omega_1 \frac{dQ_1(t)}{dt} + \omega_1^2 Q_1(t) = -\mu_1 \ddot{u}_g(t) \quad (4)$$

表層地盤の絶対加速度の最大値分布を、 $\mu_1 \phi_1(z) S_A(\omega_1, h; \ddot{u}_g)$ で表せると仮定すれば、(S_A は加速度応答スペクトル)

$$\mu_1 \phi_1(z) S_A(\omega_1, h; \ddot{u}_g) = \phi_1(z) \cdot \mu_1 S_A(\omega_1, h; \ddot{u}_g) = \phi_1(z) S_A(\omega_1, h; \mu_1 \ddot{u}_g) \quad (5)$$

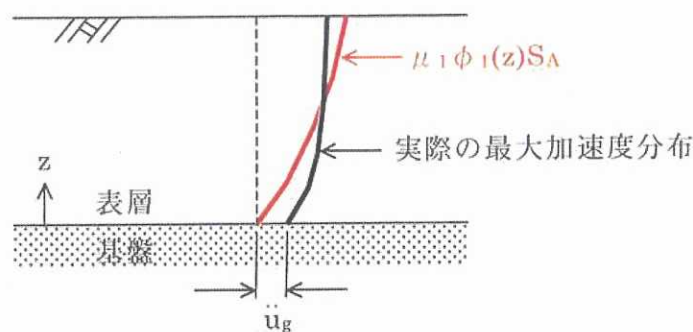
ここに、 $S_A(\omega_1, h; \mu_1 \ddot{u}_g)$ は、入力地震動 $\mu_1 \ddot{u}_g(t)$ に対する加速度応答スペクトルなので、式(4)より、

$$\mu_1 \phi_1(z) S_A(\omega_1, h; \ddot{u}_g) = \phi_1(z) \cdot \text{Max}_t \{ \ddot{Q}_1(t) + \mu_1 \ddot{u}_g(t) \} = \text{Max}_t \{ \phi_1(z)\ddot{Q}_1(t) + \mu_1 \phi_1(z)\ddot{u}_g(t) \} \quad (6)$$

式(3)と式(6)を比較すれば、 $\mu_1 \phi_1(z) = 1$ のときは、両者が一致するが、すべての位置 z では一致しないことがわかる。

以上から、 $\mu_1 \phi_1(z) = \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi z}{2H}$ であり、 $\mu_1 \phi_1(z)$ が基盤位置から地表面までゼロから $4/\pi$

に変化するので、式(6)に従って表層地盤の加速度分布を $\mu_1 \phi_1(z) S_A$ で推定するのは、式(3)で表される正解値に対して、基盤面近くでは小さめ、地表面近くでは大きめの評価になるものと考えられる。



参図 17 表層地盤の加速度分布の推定

【参考文献】

第1章 線状地中構造物の軸方向耐震設計における地盤ばねに関して

- 1)日本道路協会(1986)：共同溝設計指針
- 2)松原勝己(2007)：トンネル軸方向の耐震性検討に用いる地盤ばね定数に関する一考察、第34回土木学会関東支部技術研究発表会
- 3)Matsubara.K. & Hoshiya.M.(2000)：Soil Spring Constants of Buried Pipelines for Seismic Design, Journal of Engineering Mechanics, No.1, ASCE

第2章 水平地盤の地震時変位に関して

- 4)日本道路協会(1992)：駐車場設計・施工指針同解説
- 5)松原勝己・浦野和彦(1996)：線状地中構造物の耐震設計に用いる地中変位の算定法について、土木学会第51回年次学術講演会、第I部門
- 6)松原勝己(2002)：水平多層地盤のせん断震動モード解、土木学会第57回年次学術講演会、第I部門

第3章 地中ボックスカルバートの地震時応答に関して

- 7)安部明夫・本田国保・足立正信・嶋田昌義・弘重智彦(2001)：地中RC構造物の耐震1次診断手法、第26回地震工学研究発表会講演概要集、Vol.2
- 8)稲垣宏和・柴崎尚史・安部明夫(2005)：地中ボックスカルバートの実用的な耐震性照査手法、電力土木、No.316
- 9)宮本岳人・本田国保・松原勝己(2005)：地盤連成解析を用いない既設開削トンネルの耐震診断、土木学会第60回年次学術講演会、第V部門

参考資料

- 10)地盤工学会(2000)：サマースクールテキスト 物理数学的にみた土質力学、地盤工学における物理数学の応用に関する研究委員会
- 11)チモシェンコ・ゲーディア(1973)：弾性論、金多潔監訳、コロナ社
- 12)Y.C.ファン(1977)：固体の力学/理論、大橋義夫、村上澄男、神谷紀生共訳、培風館
- 13)犬井鐵郎(1977)：偏微分方程式とその応用、応用数学講座第9巻、コロナ社
- 14)吉田耕作ほか(1975)：応用数学便覧、丸善
- 15)大崎順彦(1983)：振動理論、建築構造学大系24、彰国社
- 16)小坪清真(1977)：土木振動学、森北出版