

# 無筋矩形断面に対する曲げ耐力の数式解について

日中構造研究所 松原勝己

## 1. はじめに

無筋コンクリートを使用したトンネル構造物の安全性照査では、無筋矩形断面に対する曲げ耐力の算出が要求されることがある。本報告では幾つかの仮定を設け、無筋矩形断面に対する曲げ耐力（M-N 曲線）の数式解を求めたので、以下に記載するものである。また、数式解を実装したエクセルファイルも作成した。

無筋矩形断面の曲げ耐力算出にあたり、以下を仮定した。

- (1)断面の直ひずみは、断面高さ方向に直線分布とする。
- (2)コンクリート引張応力は無視する。
- (3)コンクリート圧縮応力・ひずみ関係として、コンクリート標準示方書・設計編（2017年制定 p.181）に提示される非線形モデル（放物線と直線の組み合わせ）を仮定する。ただし、コンクリート強度の係数  $k_1 (=0.85)$  と限界ひずみ  $\epsilon_{cu} (=0.0035)$  の強度依存性は考慮しない。
- (4)軸力は断面中心に作用すると仮定する。
- (5)曲げ耐力を算出する限界状態としては、コンクリート圧縮縁で限界ひずみ  $\epsilon_{cu}$  に達するとき、およびコンクリート引張領域が断面中心まで達するときの2つのモードを考慮する。

なお、添付したエクセルファイルについては、自由に使用していただいて結構ですが、結果の妥当性判断については使用者に委ねることとします。

## 2. 数式解の誘導

### 2.1 場合分け

数式解は、以下の4つの場合に応じて解を求めた。

- (1)ひび割れ耐力時（中立軸位置が断面中心）かつ圧縮縁ひずみが 0.002 より小さいとき  
( $x=h/2$  かつ  $r<1$  のとき)
- (2)ひび割れ耐力時（中立軸位置が断面中心）かつ圧縮縁ひずみが 0.002 より大きいとき  
( $x=h/2$  かつ  $r\geq 1$  のとき)
- (3)終局耐力時（圧縮縁ひずみが 0.0035）かつ中立軸が断面内のとき  
( $\epsilon_{cc}=\epsilon_{cu}$  かつ  $h/2<x\leq h$  のとき)
- (4)終局耐力時（圧縮縁ひずみが 0.0035）かつ中立軸が断面外のとき  
( $\epsilon_{cc}=\epsilon_{cu}$  かつ  $x>h$  のとき、引張縁側の圧縮ひずみは 0.002 より小さい)

ここに、 $x$ ：中立軸位置（圧縮縁からの距離）、 $h$ ：断面高さ

$r$ ： $\epsilon_z=0.002$  に対する圧縮縁ひずみ  $\epsilon_{cc}$  の比 ( $=\epsilon_{cc}/\epsilon_z$ )

$\epsilon_{cc}$ ：コンクリート圧縮縁のひずみ、 $\epsilon_{cu}$ ：コンクリート圧縮限界ひずみ 0.0035

## 2.2 $x=h/2$ かつ $r<1$ のとき

本ケースは、中立軸位置が断面中心まで到達する場合で、かつ圧縮縁ひずみが 0.002 よりも小さい場合である。

軸方向の力の釣り合いおよび中立軸周りのモーメントの釣り合いより、次式が成立する。

$$N_c = N \quad (1)$$

$$N_c y_G = M \quad (2)$$

ここに、 $N_c$ ：コンクリート圧縮応力の総和

$N$ ：軸力

$y_G$ ：中立軸から  $N_c$  の作用位置までの距離

$M$ ：曲げモーメント

式(1)および(2)の  $N_c$  および  $y_G$  は、後述の参考資料において  $r<1$  の場合を参照して、次式で表される。

$$N_c = \frac{bx\sigma_0}{3} r(3-r) \quad (3)$$

$$y_G = \frac{8-3r}{4(3-r)} x \quad (4)$$

したがって、式(1)は、式(3)を用いて以下となる。

$$\frac{bx\sigma_0}{3} r(3-r) = N$$

ここで、 $x=h/2$  とし、 $r$  について整理すれば、次式のように書ける。

$$r^2 - 3r + \frac{6N}{bh\sigma_0} = 0 \quad (5)$$

$r$  について解けば、

$$r = \frac{3}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{8N}{3bh\sigma_0}} \right)$$

ここで、 $r<1$  の条件により、根号の前の符号はマイナスを採用する。

$$r = \frac{3}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{8N}{3bh\sigma_0}} \right) \quad (6)$$

なお、式(5)より、 $r=1$  のとき  $N=bh\sigma_0/3$  となり、 $r<1$  の条件から、軸力  $N$  に対し以下の制限が成立する。

$$N < \frac{bh\sigma_0}{3} \quad (7)$$

式(2)～(4)より、曲げモーメント  $M$  が、以下の通り表すことができる。

$$M = \frac{bh^2\sigma_0}{48} r(8-3r) \quad (8)$$

軸力  $N$  を既知としたとき、式(6)により  $r$  を求め、式(8)に代入することにより、ひび割れ耐力時 ( $r<1$ ) の曲げモーメント  $M$  を算出できる。ただし、軸力  $N$  に式(7)の条件が付与される。

### 2.3 $x=h/2$ かつ $r \geq 1$ のとき

本ケースは、中立軸位置が断面中心まで到達する場合で、かつ圧縮縁ひずみが 0.002 よりも大きい場合である。

式(1)および(2)は同様に成立するが、 $N_c$  および  $y_G$  は、後述の参考資料において  $r \geq 1$  の場合を参照して、次式で表される。

$$N_c = \frac{bx\sigma_0}{3r} (3r - 1) \quad (9)$$

$$y_G = \frac{6r^2 - 1}{4r(3r - 1)} x \quad (10)$$

ここで、 $x=h/2$  とすれば、式(1)と式(9)より、次式を得る。

$$\frac{bh\sigma_0}{6r} (3r - 1) = N \quad (11)$$

式(11)を  $r$  について解けば、次式を得る。

$$r = \frac{1}{3\left(1 - \frac{2N}{bh\sigma_0}\right)} \quad (12)$$

なお、式(11)より、 $r=1$  のとき  $N=bh\sigma_0/3$  となり、 $r \geq 1$  の条件から、軸力  $N$  に対し以下の制限が成立する。

$$N \geq \frac{bh\sigma_0}{3} \quad (13)$$

同様に、 $x=h/2$  として、式(2)、(9)および(10)より、曲げモーメントを次式で表すことができる。

$$M = \frac{bh^2\sigma_0}{48} \frac{6r^2 - 1}{r^2} \quad (14)$$

軸力  $N$  を既知としたとき、式(12)により  $r$  を求め、式(14)に代入することにより、ひび割れ耐力時 ( $r \geq 1$ ) の曲げモーメント  $M$  を算出できる。ただし、軸力  $N$  に式(13)の条件が付与される。

### 2.4 $\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{cu}$ かつ $h/2 < x \leq h$ のとき

本ケースは、圧縮縁においてコンクリート限界ひずみ 0.0035 に達し、かつ中立軸が断面内に存在する場合である。

軸方向の力の釣合式は、式(1)が同様に成立する。また、コンクリート圧縮応力総和  $N_c$  については、圧縮縁で  $\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{cu}$  となることを考慮し、参考資料の  $r \geq 1$  となる場合を参照するとともに、 $r = r_u = \varepsilon_{cu} / \varepsilon_z (= 0.0035 / 0.002 = 1.75)$  と置き、次式が成立する。

$$N_c = \frac{bx\sigma_0}{3r_u} (3r_u - 1) \quad (15)$$

ここに、 $b$  : 断面幅

$x$  : 中立軸位置 (圧縮縁からの距離)

$\sigma_0$  : 応力ひずみ関係におけるコンクリート応力の最大値 ( $=0.85f_c$ ,  $f_c$  : コンクリート強度)

$r_u$  : 終局時におけるひずみ  $\varepsilon_{cu}$  の  $\varepsilon_z$  ( $=0.002$ ) に対する比 ( $=0.0035/0.002=1.75$ )  
 中立軸からコンクリート応力総和  $N_c$  の作用位置までの距離  $y_G$  は、次式で得られる。

$$y_G = \frac{6r_u^2 - 1}{4r_u(3r_u - 1)} x \quad (16)$$

軸方向の力の釣り合いを考慮し、式(1)と式(15)より、次式を得る。

$$\frac{bx\sigma_0}{3r_u} (3r_u - 1) = N \quad (17)$$

ここに、 $N$  : 軸力

式(17)により、中立軸位置  $x$  が、次式で得られる。

$$x = \frac{3r_u}{b\sigma_0(3r_u - 1)} N \quad (18)$$

なお、式(17)より、 $x=h/2$  および  $x=h$  としたとき、軸力  $N$  が次式で得られる。

$$N = \frac{3r_u - 1}{6r_u} bh\sigma_0 = 0.4048bh\sigma_0 \quad (x=h/2 \text{ のとき}) \quad (19)$$

$$N = \frac{3r_u - 1}{3r_u} bh\sigma_0 = 0.8095bh\sigma_0 \quad (x=h \text{ のとき}) \quad (20)$$

すなわち、軸力  $N$  に以下の条件が付与される。

$$0.4048bh\sigma_0 \leq N \leq 0.8095bh\sigma_0 \quad (21)$$

次に、中立軸周りのモーメントの釣り合いを考慮する。本ケースでは、中立軸位置と軸力作用位置が異なるので、式(2)の右辺の軸力の項が付加され、次式が成立する。

$$N_c y_G = M - N \left( \frac{h}{2} - x \right) \quad (22)$$

式(22)に、式(15)および(16)を代入し、 $M$  について解けば、曲げモーメントが次式で得られる。

$$M = \frac{b\sigma_0(6r_u^2 - 1)}{12r_u^2} x^2 + N \left( \frac{h}{2} - x \right) \quad (23)$$

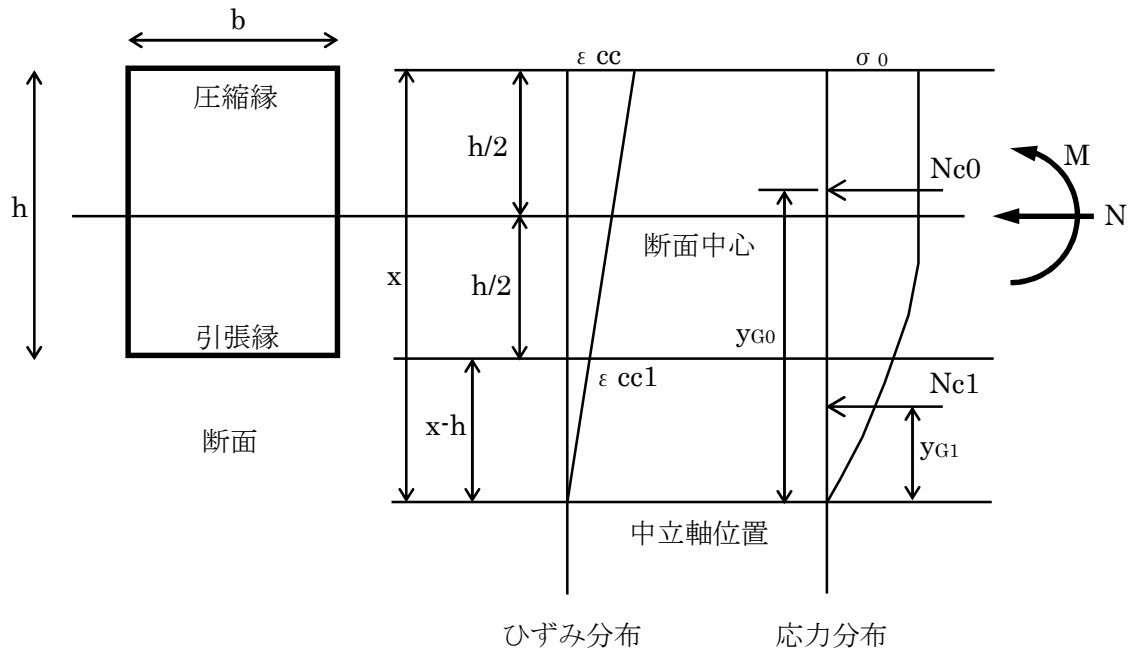
以上より、終局耐力時 ( $h/2 < x \leq h$ ) の曲げモーメントは、軸力  $N$  を既知としたとき、中立軸位置を式(18)で求め、式(23)に代入することで算出できる。ただし、軸力  $N$  に式(21)の条件が付与される。

## 2.5 $\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{cu}$ かつ $x > h$ のとき

本ケースは、圧縮縁においてコンクリート限界ひずみ  $0.0035$  に達し、かつ中立軸が断面外に存在する場合である。

本ケースの断面仮定を、図1に示す。

本ケースでは中立軸が断面外にあるため、参考資料に示す解析式によりコンクリート応力総和を算出すると、断面外の応力分の寄与も加算される。そのため、圧縮縁から中立軸までの応力総和  $N_{c0}$  を求めた後、引張縁から中立軸までの余分な応力総和  $N_{c1}$  を差し引くことでコンクリート断面内の応力総和  $N_c$  を算出することとする。同様にモーメントに関しても、 $N_{c0}$  の寄与から  $N_{c1}$  の寄与を差し引くこととする。



【記号】

h : 断面高さ

b : 断面幅

x : 圧縮縁から中立軸までの距離

$\varepsilon_{cc}$  : 圧縮縁のひずみ

$\varepsilon_{cc1}$  : 引張縁側の圧縮ひずみ

$\sigma_0$  : 圧縮縁の応力 (=0.85 $f_c$ 、 $f_c$  : コンクリート強度)

$N_{c0}$  : 断面外も含む (圧縮縁から中立軸まで) コンクリート圧縮応力総和

$N_{c1}$  : 断面外部分 (引張縁から中立軸まで) のコンクリート圧縮応力総和

$y_{G0}$  :  $N_{c0}$  の作用位置から中立軸までの距離

$y_{G1}$  :  $N_{c1}$  の作用位置から中立軸までの距離

N : 軸力

M : 曲げモーメント

図1 断面仮定 (中立軸が断面外にある場合)

図1を参照し、引張縁でのひずみ  $\varepsilon_{cc1}$  は、次式で表される。

$$\varepsilon_{cc1} = \frac{x-h}{x} \varepsilon_{cc} \quad (24)$$

$N_{c1}$ 、 $N_{c0}$  および  $N_c$  は、参考資料を参照し、次式で表すことができる。

$$N_{c1} = \frac{b(x-h)\sigma_0}{3} r_1 (3 - r_1) \quad (25)$$

$$N_{c0} = \frac{bx\sigma_0}{3r_u} (3r_u - 1) \quad (26)$$

$$N_c = N_{c0} - N_{c1} \quad (27)$$

$$\text{ここに、} r_1 = \frac{\varepsilon_{cc1}}{\varepsilon_z} = r_u \frac{x-h}{x} \quad (28)$$

$$r_u = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_z} = \frac{0.035}{0.002} = 1.75 \quad (29)$$

軸方向の力の釣り合い式は、先のケースと同様に、式(1)が成立する。式(1)および式(25)～(27)を用い、中立軸位置  $x$  について整理すれば、以下に示す 3 次方程式が得られる。

$$(r_u - 1)^3 \left(\frac{x}{h}\right)^3 + 3 \left\{ r_u^2 (2 - r_u) - r_u \frac{N}{bh\sigma_0} \right\} \left(\frac{x}{h}\right)^2 + 3r_u^2 (r_u - 1) \left(\frac{x}{h}\right) - r_u^3 = 0 \quad (30)$$

ここで、式(30)において、 $x=h$  と置けば、 $N=(3r_u-1)/(3r_u) \cdot bh\sigma_0=0.8095 \cdot bh\sigma_0$  が得られ、先のケース(3)の軸力範囲の最大値 (式(20)) に一致することがわかる。

次に、中立軸周りのモーメントの釣り合いを考慮すれば、次式が成立する。

$$N_{c0}y_{G0} - N_{c1}y_{G1} = M + N \left(x - \frac{h}{2}\right) \quad (31)$$

$$\text{ここに、} y_{G0} = \frac{6r_u^2-1}{4r_u(3r_u-1)}x \quad (32)$$

$$y_{G1} = \frac{8-3r_1}{4(3-r_1)}(x-h) \quad (33)$$

なお、 $N_{c0}$ 、 $N_{c1}$  および  $r_1$  については、式(25)、(26)および (28) により得られる。

式(31)を、 $M$  について解けば、次式を得る。

$$M = N_{c0}y_{G0} - N_{c1}y_{G1} - N \left(x - \frac{h}{2}\right) \quad (34)$$

以上より、終局耐力時 ( $x>h$ ) 曲げモーメントは、式(30)よって中立軸位置  $x$  を求め、式(34)に代入することで算出することができる。

## 2.6 まとめ

上記の結果から、4つのケースの  $M$ - $N$  関係は、以下の通り整理することができる。

(1)  $N \leq bh\sigma_0/3$  のとき

$$M = \frac{bh^2\sigma_0}{48} r(8-3r) \quad (35)$$

$$r = \frac{3}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{8N}{3bh\sigma_0}} \right) \quad (36)$$

ここに、 $N$  : 軸力、 $b$  : 断面幅、 $h$  : 断面高さ、 $\sigma_0 : 0.85f_c$  ( $f_c$  : コンクリート強度)

$M$  : 曲げモーメント

(2)  $bh\sigma_0/3 \leq N \leq 0.4048 \cdot bh\sigma_0$  のとき

$$M = \frac{bh^2\sigma_0}{48} \frac{6r^2-1}{r^2} \quad (37)$$

$$r = \frac{1}{3\left(1 - \frac{2N}{bh\sigma_0}\right)} \quad (38)$$

(3)  $0.4048 \cdot bh\sigma_0 \leq N \leq 0.8095 \cdot bh\sigma_0$  のとき

$$M = \frac{b\sigma_0(6r_u^2 - 1)}{12r_u^2} x^2 + N \left( \frac{h}{2} - x \right) \quad (39)$$

$$x = \frac{3r_u}{b\sigma_0(3r_u - 1)} N \quad (40)$$

ここに、 $r_u : \varepsilon_{cu} / \varepsilon_z (= 0.0035 / 0.002 = 1.75)$

$x$  : 圧縮縁から中立軸までの距離

(4)  $N \geq 0.8095 \cdot bh\sigma_0$  のとき

$$M = N_{c0} y_{G0} - N_{c1} y_{G1} - N \left( x - \frac{h}{2} \right) \quad (41)$$

$$N_{c0} = \frac{bx\sigma_0}{3r_u} (3r_u - 1) \quad (42)$$

$$y_{G0} = \frac{6r_u^2 - 1}{4r_u(3r_u - 1)} x \quad (43)$$

$$N_{c1} = \frac{b(x-h)\sigma_0}{3} r_1 (3 - r_1) \quad (44)$$

$$y_{G1} = \frac{8 - 3r_1}{4(3 - r_1)} (x - h) \quad (45)$$

$$r_1 = r_u \frac{x - h}{x} \quad (46)$$

$$(r_u - 1)^3 \left( \frac{x}{h} \right)^3 + 3 \left\{ r_u^2 (2 - r_u) - r_u \frac{N}{bh\sigma_0} \right\} \left( \frac{x}{h} \right)^2 + 3r_u^2 (r_u - 1) \left( \frac{x}{h} \right) - r_u^3 = 0 \quad (47)$$

### 3. 検討例

検討例には、以下の断面諸元を使用した。

断面高さ  $h$  : 30cm

断面幅  $b$  : 100cm

コンクリート圧縮強度  $f_c$  : 13.85N/mm<sup>2</sup> (材料係数  $\gamma_c=1.3$  を考慮)

図 2 に、数式解を用いた M-N 曲線の検討結果を示す。数式解に現れる 3 次方程式については、エクセルのソルバー機能を利用して解を求めた。

図 2 には、別途、先に作成した「矩形 RC 断面の M-N 相互作用図」のエクセルマクロ (分割法を適用) によって算出した結果も示した。無筋矩形断面への適用にあたっては、引張縁において引張強度に達するというひび割れ耐力  $M_c$  の定義を断面中心に変更するとともに、鉄筋断面積およびコンクリート引張強度を小さく設定することを考慮した。

図 2 によれば、数式解の結果とエクセルマクロの結果は、ほぼ一致していることがわかる。

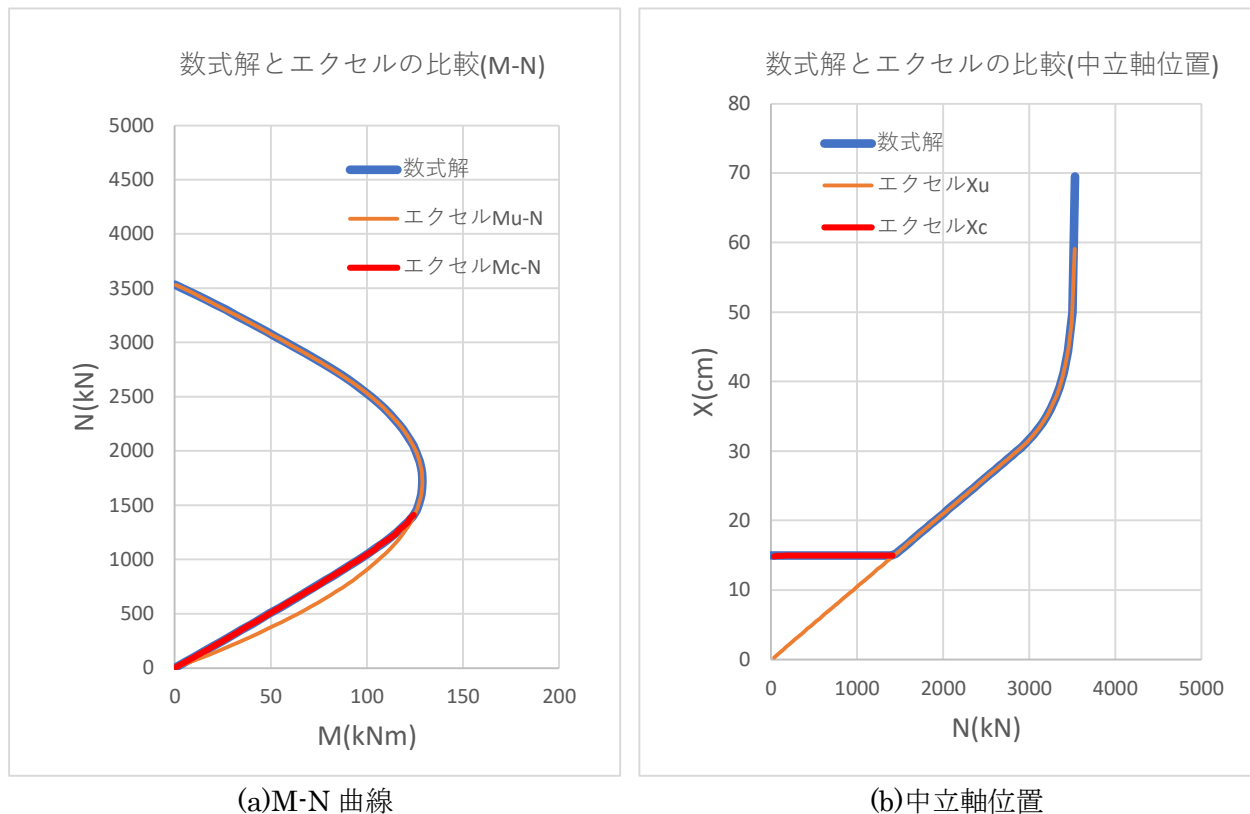


図 2 検討結果



図 3 に、M-N 曲線および中立軸位置を無次元表示した結果を示す。

M-N 曲線の誘導過程から、無次元化曲げモーメント  $M/(bh^2\sigma_0)$  が、無次元化軸力  $N/(bh\sigma_0)$  で表されることがわかる ( $b$ : 断面幅、 $h$ : 断面高さ、 $\sigma_0: 0.85f_c$ 、 $f_c$ : コンクリート強度)。したがって、無次元表示を行うことで、断面寸法やコンクリート強度に依らず M-N 曲線を汎用的に表示可能となる。

図 3 には、幾つかの閾値もプロットしている。引張破壊と圧縮破壊の境界 (釣合破壊時) となる軸力値および中立軸が断面外となる軸力値については、式(19)と(20)に示した。

最大曲げモーメントを示す軸力および曲げモーメントについては、以下の通り誘導できる。

式(18)と(23)から  $x$  を消去し、 $M$  を  $N$  で表すと次式が得られる。

$$\frac{M}{bh^2\sigma_0} = -\frac{3}{4} \frac{6r_u^2 - 4r_u + 1}{(3r_u - 1)^2} \left( \frac{N}{bh\sigma_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{N}{bh\sigma_0} \quad (48)$$

式(48)を  $N$  に関して微分し、 $dM/dN=0$  の条件から、曲げモーメント最大時の軸力値が次式で得られる。

$$\frac{N}{bh\sigma_0} = \frac{(3r_u - 1)^2}{3(6r_u^2 - 4r_u + 1)} = 0.4865 \quad (49)$$

また、曲げモーメントは、式(49)を式(48)に代入して、次式で表される。

$$\frac{M}{bh^2\sigma_0} = \frac{(3r_u - 1)^2}{12(6r_u^2 - 4r_u + 1)} = 0.1216 \quad (51)$$

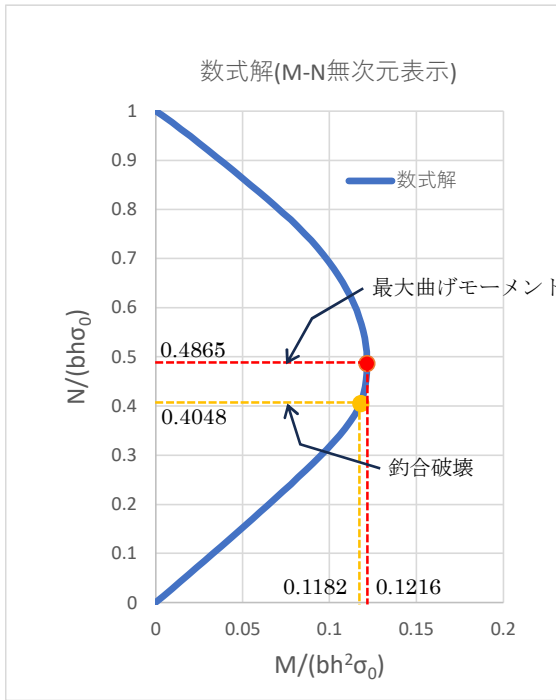
さらに、釣合破壊時の曲げモーメントについては、式(19)を式(48)に代入し、次式となる。

$$\frac{M}{bh^2\sigma_0} = \frac{6r_u^2 - 1}{48r_u^2} = 0.1182$$

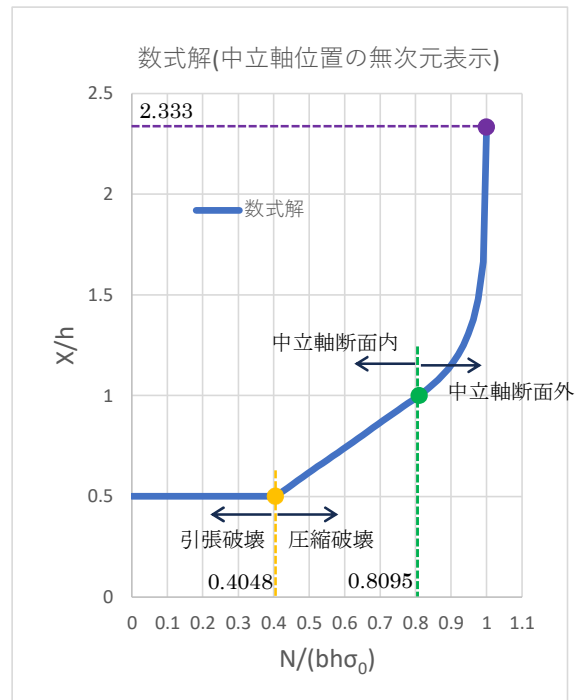
次に、断面が純圧縮耐力に達した (引張縁において  $\epsilon_z=0.002$ ) のときの中立軸位置を求めるために、式(47)に  $N/(bh\sigma_0)=1$  を代入し、 $x/h$  について解けば次式を得る。

$$\frac{x}{h} = \frac{r_u}{r_u - 1} = 2.333 \quad (52)$$

式(52)と式(24)より、 $\epsilon_{cc} = \epsilon_{cu}$  として、引張縁側ひずみ  $\epsilon_{cc1}$  を求めると  $\epsilon_{cc1} = \epsilon_z$  となることが確認できる。



(a) M-N 曲線



(b) 中立軸位置

図3 M-N および中立軸位置の無次元表示

#### 4. 添付のエクセルファイルについて

2.で導入した数式解を使用し、曲げ耐力（M-N 曲線）の算出を行うエクセルファイルを作成した。表 1 に、エクセルファイルのシートの作成例を示す。

入力する項目は、①断面高さ  $h$  (cm)、②断面幅  $b$  (cm)、③コンクリート強度  $f_c$  (N/mm<sup>2</sup>) および④軸力値 (kN) の 4 つである。これらを入力することにより、曲げ耐力  $M$  (kNm) を計算できる。

2.で説明したケース(1)~(4)のうち、(1)~(3)まではエクセルのセル内に記述した式による表計算であるが、ケース(4)についてはエクセルのソルバーとマクロを併用した計算となっている。

曲げ耐力の計算手順は、以下の通りである。

(1)3 つの断面諸元、断面高さ、断面幅およびコンクリート強度を入力する。

(2)曲げ耐力を計算する軸力値を、0 から順に入力する。表 1 の例では、軸力値の最大値  $N_{max}$  を純圧縮耐力 ( $0.85 \cdot f_c \cdot b \cdot h$ ) と設定している。

(3)軸力の全範囲 (0~ $N_{max}$ ) にわたり、項目  $N/(bh \sigma_0)$  から  $yG1$ (cm)までをドラッグする。それにより、ケース(1)~(3)までについては曲げ耐力が計算される。

(4)ケース(4)の計算については、以下の通りソルバーとマクロを併用する。

(5)「開発」→「マクロ」→「編集」の順にクリックし、マクロのソースコードを開く。

(6)ケース(4)の計算範囲を以下の通り指定する。「 $k(=x/h)$ 」の項目に「-」が入っていない最初の行数と最後の行数を確認し、ソースコードの変数「 $ista$ 」と「 $iend$ 」に設定を行う。表 1 の例では、それぞれ 62 と 75 になっている。

(7)マクロを実行する。ソルバーの表が現れるので、正常に計算されたことを確認し、「OK」をクリックする。この操作をケース(4)に相当する軸力の数だけ行う。表 1 の例では、14 回である。

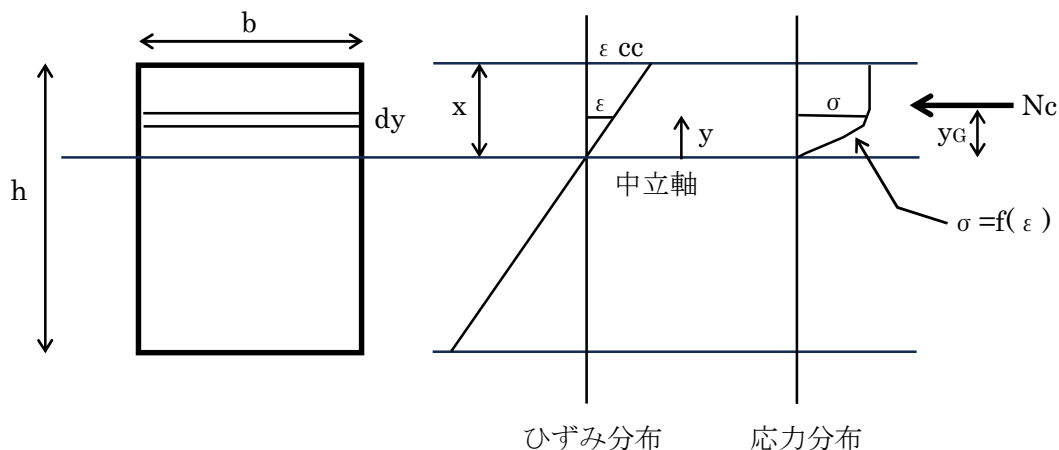
表1 エクセルファイルのシート「曲げ耐力」の作成例

		数式解												
断面高さh(cm)	30	軸力N(kNm)	N/(bhσ0)	r	X(cm)	M(kNm)	k(=X/h)	f(k)	Nc0(kN)	yG0(cm)	r1	Nc1(kN)	yG1(cm)	
断面幅b(cm)	100	0	0.0000	0.0000	15.000	0.000	-	-	-	-	-	-	-	
コンクリート強度fc(N/mm2)	13.85	50	0.0142	0.0286	15.000	4.994	-	-	-	-	-	-	-	
強度に係る係数k1	0.85	100	0.0283	0.0578	15.000	9.975	-	-	-	-	-	-	-	
εzに対するεcuの比ru	1.75	150	0.0425	0.0875	15.000	14.944	-	-	-	-	-	-	-	
		200	0.0566	0.1179	15.000	19.898	-	-	-	-	-	-	-	
Nmax(kNm)	3530.8	250	0.0708	0.1490	15.000	24.837	-	-	-	-	-	-	-	
		300	0.0850	0.1808	15.000	29.759	-	-	-	-	-	-	-	
		350	0.0991	0.2134	15.000	34.665	-	-	-	-	-	-	-	
		400	0.1133	0.2469	15.000	39.552	-	-	-	-	-	-	-	
		450	0.1275	0.2813	15.000	44.418	-	-	-	-	-	-	-	
		500	0.1416	0.3166	15.000	49.262	-	-	-	-	-	-	-	
		550	0.1558	0.3531	15.000	54.083	-	-	-	-	-	-	-	
		600	0.1699	0.3908	15.000	58.877	-	-	-	-	-	-	-	
		650	0.1841	0.4298	15.000	63.641	-	-	-	-	-	-	-	
		700	0.1983	0.4702	15.000	68.374	-	-	-	-	-	-	-	
		750	0.2124	0.5123	15.000	73.069	-	-	-	-	-	-	-	
		800	0.2266	0.5563	15.000	77.723	-	-	-	-	-	-	-	
		850	0.2407	0.6025	15.000	82.330	-	-	-	-	-	-	-	
		900	0.2549	0.6511	15.000	86.881	-	-	-	-	-	-	-	
		950	0.2691	0.7027	15.000	91.367	-	-	-	-	-	-	-	
		1000	0.2832	0.7579	15.000	95.774	-	-	-	-	-	-	-	
		1050	0.2974	0.8176	15.000	100.083	-	-	-	-	-	-	-	
		1100	0.3115	0.8830	15.000	104.265	-	-	-	-	-	-	-	
		1150	0.3257	0.9562	15.000	108.275	-	-	-	-	-	-	-	
		1200	0.3399	1.0408	15.000	112.033	-	-	-	-	-	-	-	
		1250	0.3540	1.1418	15.000	115.477	-	-	-	-	-	-	-	
		1300	0.3682	1.2645	15.000	118.602	-	-	-	-	-	-	-	
		1350	0.3824	1.4167	15.000	121.408	-	-	-	-	-	-	-	
		1400	0.3965	1.6105	15.000	123.896	-	-	-	-	-	-	-	
		1450	0.4107	-	15.219	125.706	-	-	-	-	-	-	-	
		1500	0.4248	-	15.744	126.766	-	-	-	-	-	-	-	
		1550	0.4390	-	16.269	127.608	-	-	-	-	-	-	-	
		1600	0.4532	-	16.794	128.231	-	-	-	-	-	-	-	
		1650	0.4673	-	17.318	128.637	-	-	-	-	-	-	-	
		1700	0.4815	-	17.843	128.824	-	-	-	-	-	-	-	
		1750	0.4956	-	18.368	128.792	-	-	-	-	-	-	-	
		1800	0.5098	-	18.893	128.543	-	-	-	-	-	-	-	
		1850	0.5240	-	19.418	128.075	-	-	-	-	-	-	-	
		1900	0.5381	-	19.942	127.389	-	-	-	-	-	-	-	
		1950	0.5523	-	20.467	126.484	-	-	-	-	-	-	-	
		2000	0.5664	-	20.992	125.361	-	-	-	-	-	-	-	
		2050	0.5806	-	21.517	124.020	-	-	-	-	-	-	-	
		2100	0.5948	-	22.042	122.461	-	-	-	-	-	-	-	
		2150	0.6089	-	22.566	120.683	-	-	-	-	-	-	-	
		2200	0.6231	-	23.091	118.687	-	-	-	-	-	-	-	
		2250	0.6373	-	23.616	116.473	-	-	-	-	-	-	-	
		2300	0.6514	-	24.141	114.040	-	-	-	-	-	-	-	
		2350	0.6656	-	24.666	111.389	-	-	-	-	-	-	-	
		2400	0.6797	-	25.190	108.520	-	-	-	-	-	-	-	
		2450	0.6939	-	25.715	105.433	-	-	-	-	-	-	-	
		2500	0.7081	-	26.240	102.127	-	-	-	-	-	-	-	
		2550	0.7222	-	26.765	98.603	-	-	-	-	-	-	-	
		2600	0.7364	-	27.290	94.861	-	-	-	-	-	-	-	
		2650	0.7505	-	27.814	90.900	-	-	-	-	-	-	-	
		2700	0.7647	-	28.339	86.721	-	-	-	-	-	-	-	
		2750	0.7789	-	28.864	82.324	-	-	-	-	-	-	-	
		2800	0.7930	-	29.389	77.708	-	-	-	-	-	-	-	
		2850	0.8072	-	29.913	72.874	-	-	-	-	-	-	-	
		2900	0.8214	-	30.453	67.888	1.015	1.1E-06	2901.4	17.785	0.0260	1.4	0.301	
		2950	0.8355	-	31.036	62.870	1.035	4.26E-06	2957.0	18.126	0.0584	7.0	0.689	
		3000	0.8497	-	31.673	57.820	1.056	1.32E-06	3017.6	18.498	0.0924	17.6	1.111	
		3050	0.8638	-	32.373	52.733	1.079	3.38E-06	3084.3	18.907	0.1283	34.3	1.573	
		3100	0.8780	-	33.148	47.607	1.105	1.26E-06	3158.2	19.360	0.1662	58.2	2.083	
		3150	0.8922	-	34.017	42.436	1.134	2.74E-06	3241.0	19.867	0.2067	91.0	2.653	
		3200	0.9063	-	35.005	37.214	1.167	4.14E-06	3335.1	20.444	0.2502	135.1	3.299	
		3250	0.9205	-	36.148	31.932	1.205	3.36E-06	3444.0	21.112	0.2976	194.0	4.042	
		3300	0.9346	-	37.503	26.581	1.250	2.87E-06	3573.1	21.903	0.3501	273.1	4.919	
		3350	0.9488	-	39.165	21.143	1.305	7.29E-07	3731.4	22.874	0.4095	381.4	5.989	
		3400	0.9630	-	41.315	15.597	1.377	4.9E-06	3936.3	24.130	0.4793	536.3	7.364	
		3450	0.9771	-	44.379	9.898	1.479	3.57E-06	4228.2	25.919	0.5670	778.1	9.306	
		3500	0.9913	-	49.913	3.953	1.664	1.79E-06	4755.4	29.151	0.6982	1255.4	12.772	
		3530.8	1.0000	-	69.507	0.000	2.317	-1.9E-06	6622.3	40.595	0.9947	3091.5	24.705	

参考資料 コンクリート圧縮応力総和  $N_c$  とその作用位置  $y_G$  について

以下では、コンクリート応力・ひずみ関係を非線形とした場合（参図 2）、コンクリート圧縮応力総和  $N_c$  および作用位置  $y_G$  を、解析的に算出する。

参図 1 に、断面仮定を示す。

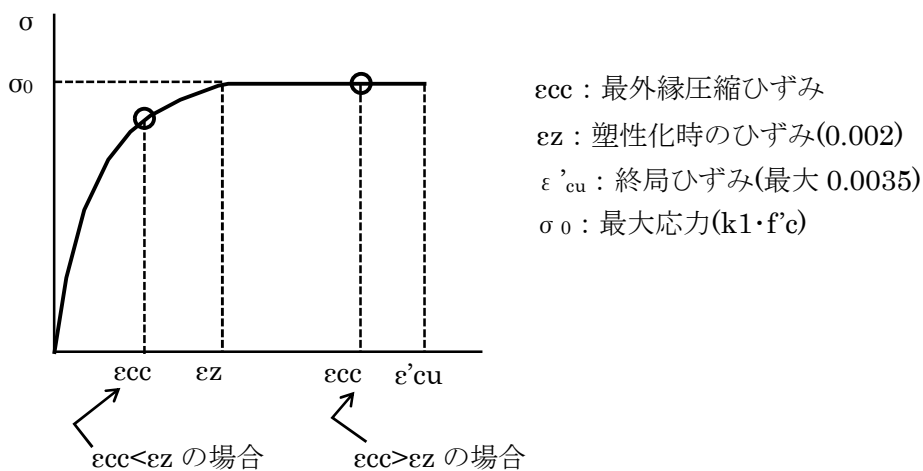


[記号]

- $b$  : 断面幅、 $h$  : 断面高さ、 $x$  : 中立軸位置（圧縮縁からの長さ）、 $\epsilon_{cc}$  : 圧縮縁ひずみ
- $N_c$  : コンクリート圧縮応力総和、 $y_G$  : コンクリート圧縮応力総和の作用位置（中立軸からの距離）
- $\sigma = f(\epsilon)$  : コンクリートの応力ひずみ関係、 $y$  : 中立軸から上方にとった座標値、 $\epsilon$  :  $y$  におけるひずみ、 $\sigma$  :  $y$  におけるコンクリート応力

参図 1 断面仮定

コンクリートの応力・ひずみ関係  $\sigma = f(\epsilon)$  として、土木学会・コンクリート標準示方書・設計編（2017年制定 p.181）に従い、参図 2 に示すように放物線と直線の組み合わせでモデル化する。



参図 2 コンクリートの応力・ひずみ関係

## 1. コンクリート応力の総和 $N_c$

コンクリート圧縮応力総和  $N_c$  は、次式で表すことができる。

$$N_c = \int_0^x b \cdot dy \cdot \sigma = \int_0^x bf(\varepsilon)dy \quad (1)$$

$y=(x/\varepsilon_{cc}) \cdot \varepsilon$  を考慮し、変数  $y$  を  $\varepsilon$  に置換すれば、 $dy=(x/\varepsilon_{cc})d\varepsilon$ 、積分範囲が 0 から  $\varepsilon_{cc}$  になるから、式(1)は次式となる。

$$N_c = \frac{bx}{\varepsilon_{cc}} \int_0^{\varepsilon_{cc}} f(\varepsilon)d\varepsilon \quad (2)$$

$$\text{ここに、} f(\varepsilon) = \begin{cases} \sigma_0 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_z} \left(2 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_z}\right) & (\varepsilon < \varepsilon_z) \\ \sigma_0 & (\varepsilon \geq \varepsilon_z) \end{cases}$$

$$\sigma_0 = k_1 f'_c$$

(a)  $\varepsilon_{cc} < \varepsilon_z$  のとき

$\varepsilon = \varepsilon_z \cdot t$  と置けば、 $d\varepsilon = \varepsilon_z dt$  であり、 $r = \varepsilon_{cc} / \varepsilon_z$  を定義すれば、変数  $t$  に関する積分範囲は 0 から  $r$  となるから、式(2)は、次式となる。

$$N_c = \frac{bx}{\varepsilon_{cc}} \int_0^r \sigma_0 t(2-t)\varepsilon_z dt = bx\sigma_0 \frac{1}{r} \int_0^r t(2-t)dt = bx\sigma_0 \frac{1}{r} \left[ t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_0^r = \frac{bx\sigma_0}{3} r(3-r) \quad (3)$$

(b)  $\varepsilon_{cc} \geq \varepsilon_z$  のとき

$$N_c = \frac{bx}{\varepsilon_{cc}} \int_0^{\varepsilon_z} \sigma_0 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_z} \left(2 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_z}\right) d\varepsilon + \frac{bx}{\varepsilon_{cc}} \int_{\varepsilon_z}^{\varepsilon_{cc}} \sigma_0 d\varepsilon = I_1 + I_2 \quad (4)$$

(a)と同様に、変数  $t$  と  $r$  を定義すれば、 $I_1$  の  $t$  に関する積分範囲は、0 から 1 となり、以下のように書ける。

$$I_1 = \frac{bx}{\varepsilon_{cc}} \int_0^1 \sigma_0 t(2-t)\varepsilon_z dt = bx\sigma_0 \frac{1}{r} \int_0^1 t(2-t)dt = bx\sigma_0 \frac{1}{r} \left[ t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2bx\sigma_0}{3r} \quad (5)$$

$I_2$  についても、同様に変数  $t$  と  $r$  を定義すれば、 $I_2$  の  $t$  に関する積分範囲は、1 から  $r$  となり、以下のように書ける。

$$I_2 = bx\sigma_0 \frac{1}{r} \int_1^r dt = bx\sigma_0 \frac{1}{r} [t]_1^r = \frac{bx\sigma_0}{r} (r-1) \quad (6)$$

したがって、式(4)~(6)より、

$$N_c = \frac{2bx\sigma_0}{3r} + \frac{bx\sigma_0}{r} (r-1) = \frac{bx\sigma_0}{3r} (3r-1) \quad (7)$$

以上より、 $N_c$  の値は、 $r < 1$  あるいは  $r \geq 1$  により、以下の通り表される。

$$N_c = \begin{cases} \frac{bx\sigma_0}{3} r(3-r) & (r < 1) \\ \frac{bx\sigma_0}{3r} (3r-1) & (r \geq 1) \end{cases} \quad (8)$$

ここに、 $r = \frac{\varepsilon_{cc}}{\varepsilon_z}$

$b$  : 断面幅、 $x$  : 中立軸位置 (圧縮縁から中立軸までの距離)、 $\sigma_0$  : 最大応力 (=  $k_1 f'_c$ )、

$\varepsilon_{cc}$  : 圧縮縁におけるひずみ、 $\varepsilon_z$  : 塑性化し始めるひずみ (=0.002)

式(8)により、コンクリート応力総和  $N_c$  を求めることができる。なお、終局時を想定し圧縮縁ひずみ  $\varepsilon_{cc} = \varepsilon'_{cu} = 0.0035$  とした場合、 $r = 1.75$  となり、 $N_c = 0.8095B \cdot k_1 \cdot f'_c \cdot x$  が得られるが、この係数値は、等価応力ブロック法における  $\beta_1 = 0.8$  とほぼ等しいことがわかる。

## 2 コンクリート応力総和 $N_c$ の作用位置 $y_G$

コンクリート圧縮応力総和  $N_c$  の作用点の中立軸からの距離  $y_G$  を求める。

中立軸周りのコンクリート応力総和のモーメントの釣合により、次式が成立する。

$$N_c y_G = \int_0^x b \cdot dy \cdot \sigma \cdot y \quad (9)$$

$y_G$  について解けば、次式が得られる。

$$y_G = \frac{\int_0^x b \sigma y dy}{N_c} \quad (10)$$

ここで、式(10)の右辺の積分値を  $I$  とし、 $y = (x / \varepsilon_{cc}) \cdot \varepsilon$ 、 $dy = (x / \varepsilon_{cc}) d\varepsilon$  の変数変換を行えば、次式を得る。

$$I = \frac{bx^2}{\varepsilon_{cc}^2} \int_0^{\varepsilon_{cc}} f(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon \quad (11)$$

$$\text{ここに、} f(\varepsilon) = \begin{cases} \sigma_0 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_z} \left(2 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_z}\right) & (\varepsilon < \varepsilon_z) \\ \sigma_0 & (\varepsilon \geq \varepsilon_z) \end{cases}$$

$$\sigma_0 = k_1 f'_c$$

(a)  $\varepsilon_{cc} < \varepsilon_z$  のとき

$\varepsilon = \varepsilon_z \cdot t$  と置けば、 $d\varepsilon = \varepsilon_z dt$  であり、 $r = \varepsilon_{cc} / \varepsilon_z$  を定義すれば、変数  $t$  に関する積分範囲は 0 から  $r$  となるから、式(11)は、次式となる。

$$I = \frac{bx^2}{\varepsilon_{cc}^2} \sigma_0 \int_0^r t^2 (2-t) \varepsilon_z^2 dt = bx^2 \sigma_0 \frac{1}{r^2} \left[ \frac{2}{3} t^3 - \frac{t^4}{4} \right]_0^r = \frac{bx^2 \sigma_0 r}{12} (8 - 3r) \quad (12)$$

(b)  $\varepsilon_{cc} \geq \varepsilon_z$  のとき

$$I = \frac{bx^2}{\varepsilon_{cc}^2} \int_0^{\varepsilon_z} \sigma_0 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_z} \left(2 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_z}\right) \varepsilon d\varepsilon + \frac{bx^2}{\varepsilon_{cc}^2} \int_{\varepsilon_z}^{\varepsilon_{cc}} \sigma_0 \varepsilon d\varepsilon = I_1 + I_2$$

(a)と同様に、変数  $t$  と  $r$  を定義すれば、 $I_1$  の  $t$  に関する積分範囲は、0 から 1 となり、以下のように書ける。

$$I_1 = \frac{bx^2}{\varepsilon_{cc}^2} \int_0^1 \sigma_0 t^2 (2-t) \varepsilon_z^2 dt = \frac{bx^2 \sigma_0}{r^2} \left[ \frac{2}{3} t^3 - \frac{t^4}{4} \right]_0^1 = \frac{5bx^2 \sigma_0}{12r^2} \quad (13)$$

$I_2$  についても、同様に変数  $t$  と  $r$  を定義すれば、 $I_2$  の  $t$  に関する積分範囲は、1 から  $r$  となり、以下のように書ける。

$$I_2 = bx^2 \sigma_0 \left( \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_{cc}} \right)^2 \int_1^r t dt = bx^2 \sigma_0 \frac{1}{r^2} \left[ \frac{t^2}{2} \right]_1^r = \frac{bx^2 \sigma_0}{2r^2} (r^2 - 1) \quad (14)$$

したがって、式(12)~(14)より、

$$I = \frac{5bx^2\sigma_0}{12} + \frac{bx^2\sigma_0}{2r^2}(r^2 - 1) = \frac{bx^2\sigma_0}{12r^2}(6r^2 - 1) \quad (15)$$

式(12)と(15)を、式(10)に代入し、かつ  $N_c$  に式(8)を用いることにより、 $y_G$  が以下のように表すことができる。

$$y_G = \frac{I}{N_c} = \begin{cases} \frac{8-3r}{4(3-r)}x & (r < 1) \\ \frac{6r^2-1}{4r(3r-1)}x & (r \geq 1) \end{cases} \quad (16)$$

ここに、 $r = \frac{\varepsilon_{cc}}{\varepsilon_z}$

$x$  : 中立軸位置 (圧縮縁から中立軸までの距離)、 $\varepsilon_{cc}$  : 圧縮縁におけるひずみ、 $\varepsilon_z$  : 塑性化し始めるひずみ (=0.002)

式(16)により、コンクリート応力総和の作用点位置  $y_G$  を求めることができる。なお、終局時を想定し圧縮縁ひずみ  $\varepsilon_{cc} = \varepsilon'_{cu} = 0.0035$  とした場合、 $r = 1.75$  となり  $y_G = 0.5840x$  が得られるが、作用点位置を圧縮縁からの距離で表すと、 $0.416x$  となる。この値は等価応力ブロック法における  $a/2 = \beta_1 \cdot x/2 = 0.4x$  とほぼ等しいことがわかる。